

Προσεγγιστική Ολοκλήρωση των Εξισώσεων Πεδίου του Βαρυτικού Πεδίου

Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der
Gravitation

Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin).
Sitzungsberichte (1916)

Albert Einstein

Μετάφραση από τα Αγγλικά :
B. Καράβολας , Ph. D.
email: vassilis@karavolas.gr

5 Μαρτίου 2023

Για τη μελέτη των ειδικών (αλλά όχι βασικών(απλών)) προβλημάτων στη θεωρία της βαρύτητας μπορεί κανείς να ικανοποιηθεί με μια πρώτη προσέγγιση του $g_{\mu\nu}$. Για τους ίδιους λόγους όπως και στην περίπτωση της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας μας είναι πολύ χρήσιμη η φανταστική χρονική μεταβλητή $x_4 = it$ ¹. Με τον όρο «πρώτη προσέγγιση» εννοούμε ότι οι ποσότητες $\gamma_{\mu\nu}$, που ορίζονται από τη σχέση

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \quad (1)$$

είναι μικρές σε σύγκριση με το 1, έτσι ώστε τα τετράγωνα και τα γινόμενα τους να είναι αμελητέα σε σύγκριση με τις πρώτες δυνάμεις τους. Επιπλέον οι ποσότητες αυτές υπό γραμμικούς ορθογώνιους μετασχηματισμούς συμπεριφέρονται ως τανυστές. Επίσης ισχύει ότι $\delta_{\mu,\nu} = 1$ όταν $\mu = \nu$ και $\delta_{\mu,\nu} = 0$ όταν $\mu \neq \nu$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι αυτά τα $\gamma_{\mu\nu}$ μπορούν να υπολογιστούν με τρόπο ανάλογο με αυτόν των καθυστερημένων δυναμικών στην ηλεκτροδυναμική. Από αυτό βγαίνει ότι τα βαρυτικά πεδία διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός. Στηριζόμενοι σε αυτή τη γενική λύση των εξισώσεων θα διερευνήσουμε στη συνέχεια τα κύματα βαρύτητας και τον τρόπο με τον οποίο δημιουργούνται. Τελικά αποδείχθηκε ότι η προτεινόμενη επιλογή ενός συστήματος αναφοράς που ικανοποιεί την συνθήκη $g = |\gamma_{\mu\nu}| = -1$ δεν είναι η καλύτερη δυνατή για τον υπολογισμό των βαρυτικών πεδίων στην πρώτη προσέγγιση. Μια σημείωση σε ένα γράμμα από τον αστρονόμο De Sitter με πληροφόρησε για τα αποτελέσματα του τα οποία δείχνουν ότι η επιλογή ενός διαφορετικού συστήματος αναφοράς, διαφορετικού από αυτό που προηγουμένως είχα επιλέξει [1] οδηγεί σε μια απλούστερη έκφραση του βαρυτικού πεδίου μιας σημειακής μάζας σε ηρεμία. Συνεπώς παίρνω τις γενικά αναλλοίωτες εξισώσεις πεδίου ως βάση για όλα αυτά που ακολουθούν.

¹Σημ. Ελλην. Μεταφ. Συνήθως στην Ειδική Σχετικότητα το στοιχείο του διαστήματος γράφεται ως

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

Η απεικόνιση αυτή ξεφεύγει από την ευκλείδια η οποία απαιτεί μέσα από τη γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος όλα τα τετράγωνα των συντεταγμένων να έχουν θετικό πρόσημο. Ο Minkowski το 1907 θέλοντας να δείξει ότι η γεωμετρία της ΕΘΣ αν και είναι μια τετραδιάστατη πολλαπλότητα μοιάζει με την ευκλείδια εισήγαγε τον μετασχηματισμό αυτό, έτσι ώστε το αρνητικό ποσημο να μπει μέσα στην συντεταγμένη και η εικόνα να μοιάζει πολύ με την ευκλείδια. Αργότερα οι περισσότεροι συγγραφείς απέρριψαν αυτή την πρόταση και γράφουν τη μετρική με το αρνητικό πρόσημο. Εδώ ο Einstein ακολουθεί την πρόταση του Minkowski.

1 Ολοκλήρωση των προσεγγιστικών εξισώσεων του βαρυτικού πεδίου

Οι εξισώσεις πεδίου στη συναλλοίωτη τους μορφή είναι:

$$\left. \begin{aligned} R_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} &= -\kappa(T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \\ R_{\mu\nu} &= -\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \sum_{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \mu \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \\ S_{\mu\nu} &= \frac{\partial^2 \log \sqrt{g}}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} - \sum_{\alpha} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x_{\alpha}} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

2.

Οι αγκύλες υποδηλώνουν εδώ τα γνωστά σύμβολα του Christoffel (του δεύτερου είδους), ο $T_{\mu\nu}$ τον συναλλοίωτο ενεργειακό τανυστή της ύλης, και το T το αντίστοιχο βαθμωτό μέγεθος. Οι εξισώσεις (1) παράγουν, στην προσέγγιση που μας ενδιαφέρει εδώ και αφού επεκταθούν, απευθείας τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu} \partial x_{\alpha}} + \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu} \partial x_{\alpha}} - \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} \left(\sum_{\alpha} \gamma_{\alpha\alpha} \right) = \\ -2\kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha} T_{\alpha\alpha}) \end{aligned} \quad (2)$$

Ο τελευταίος όρος στην αριστερή πλευρά προέρχεται από την ποσότητα $S_{\mu\nu}$, η οποία μπορεί να υπολογισθεί με τη χρήση:

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma'_{\mu\nu} + \psi \delta_{\mu\nu} \quad (3)$$

όταν το $\gamma'_{\mu\nu}$ υπακούει στην επιπλέον συνθήκη:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0 \quad (4)$$

²Σημ. Αμερικάνου Μεταφ. Η τρίτη εξίσωση έχει διορθωθεί ώστε να περιέχει ένα αρνητικό πρόσημο μπροστά από την άθροιση. Επίσης το σύμβολο « ∂ » στον πρώτο όρο έχει διορθωθεί ώστε να είναι « ∂^2 »

Αντικαθιστώντας την (3) στην (2) παίρνουμε για την αριστερή πλευρά³

$$-\sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} \left(\sum_{\alpha} \gamma'_{\alpha\alpha} \right) + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} - \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_{\alpha}^2} - 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}}.$$

Οι συνεισφορές από τον δεύτερο, τον τρίτο και τον πέμπτο όρο εξαφανίζονται αν το ψ επιλεγεί ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\sum_{\alpha} \gamma'_{\alpha\alpha} + 2\psi = 0 \quad (5)$$

Δεχόμαστε ότι ισχύει αυτή η συνθήκη και τότε στη θέση της (2) έχουμε ότι:

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha}^2} (\gamma'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha} \gamma'_{\alpha\alpha}) = 2\kappa (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha} T_{\alpha\alpha})$$

ή

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha}^2} \gamma'_{\mu\nu} = 2\kappa T_{\mu\nu} \quad (6)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η εξίσωση (6) είναι σε συμφωνία με την εξίσωση (4), καθώς αποδεικνύεται εύκολα ότι για την ακρίβεια που θέλουμε να έχουμε στους υπολογισμούς μας το θεώρημα της ενέργειας - ορμής για την ύλη εκφράζεται από την εξίσωση

$$\sum_{\nu} \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0 \quad (7)$$

Εάν η (6) υποβληθεί στην άθροιση $\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}$, τότε το αριστερό της μέλος μηδενίζεται όχι μόνο λόγω

της (4), αλλά - όπως και θα έπρεπε - και το δεξιό μέλος της (6) λόγω της (7). Σημειώνουμε ότι οι εξισώσεις

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha} \gamma'_{\alpha\alpha} \quad (8)$$

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha\alpha} \quad (8\alpha)$$

³Σημ. Αμερικάνου Μεταφ.: Το « $\partial \gamma'_{\mu\nu}$ » στον πρώτο όρο διορθώθηκε σε « $\partial^2 \gamma'_{\mu\nu}$ ».

ισχύουν λόγω των (3) και (5). Το πρόβλημά μας λύνεται καθώς τα $\gamma'_{\mu\nu}$ μπορεί να υπολογιστούν με τη μέθοδο των καθυστερημένων δυναμικών. Τότε έχουμε:

$$\gamma'_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{T_{\mu\nu}(x_0, y_0, z_0, t-r)}{r} dV_0 \quad (9)$$

όπου οι x, y, z, t δηλώνουν εδώ τις τιμές των συντεταγμένων $x_1, x_2, x_3, \frac{x_4}{i}$. Συγκεκριμένα χωρίς δείκτη υποδηλώνουν υποδηλώνουν τις συντεταγμένες του «σημείου του πεδίου», ενώ με δείκτη «0» εκείνες του στοιχείου που ολοκληρώνουμε. Με το dV_0 συμβολίζουμε το τρισδιάστατο στοιχείο όγκου του χώρου που ολοκληρώνουμε, ενώ με το r συμβολίζουμε τη χωρική απόσταση $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ ⁴.

Για τα όσα ακολουθούν, χρειαζόμαστε επίσης τις ενεργειακές συνιστώσες του βαρυτικού πεδίου. Ο απλούστερος τρόπος είναι να τις υπολογίσουμε απευθείας από τις εξισώσεις (6). Πολλαπλασιάζοντας

με $\frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ και αθροίζοντας πάνω στα μ και ν καταλήγει κανείς μετά από την συνήθη αναδιάταξη στην ακόλουθη παράσταση για την αριστερή πλευρά⁵:⁶

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[\sum_{\mu\nu} \frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} \frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{1}{2} \delta_{\sigma\alpha} \sum_{\mu\nu} \sum_{\mu\nu\beta} \left(\frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} \right)^2 \right]$$

Η ποσότητα στις παρενθέσεις προφανώς εκφράζει τις ενεργειακές συνιστώσες $t_{\sigma\alpha}$ μέχρι ένα συντελεστή αναλογικότητας, ο οποίος βρίσκεται εύκολα από τον υπολογισμό της δεξιάς πλευράς. Το θεώρημα ενέργειας - ορμής της ύλης, χωρίς να αμελούμε κανένα όρο, είναι

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial \sqrt{-g} T_{\mu}^{\sigma}}{\partial x_{\sigma}} + \frac{1}{2} \sum_{\rho\sigma} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}} \sqrt{-g} T_{\rho\sigma} = 0$$

Κάτω από την επιθυμητή τάξη προσέγγισης, το θεώρημα αυτό μπορεί να αντικατασταθεί από τη σχέση:

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial T_{\mu\sigma}}{\partial x_{\sigma}} + \frac{1}{2} \sum_{\rho\sigma} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}} T_{\rho\sigma} = 0 \quad (7\alpha)$$

⁴Σημ. Αμερικάνου Μεταφ.: Ο όρος $(z-z)$ έχει διορθωθεί σε $(z-z_0)$

⁵Σημ. Έλλην. Μεταφ.: Στην εργασία του 1918 για τα βαρυτικά κύματα ο Einstein παραδέχεται ότι έχει κάνει ένα μαθηματικό σφάλμα. Συγκεκριμένα έχει πολλαπλασιάσει με $\frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}$ και όχι με $\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}$ [2]. Το σφάλμα αυτό οδηγεί τον Einstein σε παράλογα αποτελέσματα στις επόμενες παραγράφους αυτής της εργασίας όπως στην ύπαρξη βαρυτικών κυμάτων τα οποία δεν μεταφέρουν ενέργεια, ή στην αναγκαιότητα της χρήσης ενός συγκεκριμένου συστήματος συντεταγμένων.

⁶Σημ. Αμερικάνου Μεταφ.: Προστέθηκε μια άθροιση πάνω στο α καθώς και μια διόρθωση του « $d_{\sigma\alpha}$ » σε « $\delta_{\sigma\alpha}$ ».

Αυτή η διατύπωση είναι κατά μια τάξη ακριβέστερη από την εξίσωση (7). Επομένως, η δεξιά πλευρά της (6) δίνει με τη συγκεκριμένη τροποποίηση:

$$-4\kappa \sum_{\nu} \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}}$$

Συνεπώς, το θεώρημα διατήρησης μετατρέπεται στο:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu})}{\partial x_{\nu}} = 0 \quad (10)$$

όπου

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{4\kappa} \left[\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha\beta\tau} \left(\frac{\partial \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_{\tau}} \right)^2 \right] \quad (11)$$

είναι οι ενεργειακές συνιστώσες του βαρυτικού πεδίου.

Ως το απλούστερο παράδειγμα εφαρμογής της θεωρίας, θα υπολογίσουμε το βαρυτικό πεδίο μιας σημειακής μάζας M , η οποία ηρεμεί στην αρχή των αξόνων. Ο ενεργειακός τανυστής της ύλης, αμελώντας τις οποιεσδήποτε επιφανειακές δυνάμεις, είναι:

$$T_{\mu\nu} = \rho \frac{dx_{\mu}}{ds} \frac{dx_{\nu}}{ds} \quad (12)$$

θεωρώντας ότι στην πρώτη προσέγγιση ο συναλλοίωτος τανυστής ενέργειας μπορεί να αντικατασταθεί από τον ανταλλοίωτο. Η βαθμωτή ποσότητα ρ είναι η πυκνότητα μάζας (η οποία μετράται φυσικά). Από τις (9) και (12) προκύπτει ότι όλα τα $\gamma'_{\mu\nu}$ εκτός του γ'_{44} μηδενίζονται ενώ αυτό είναι⁷:

$$\gamma'_{44} = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{M}{r} \quad (13)$$

Με τη βοήθεια των (8) και (1) βρίσκουμε για τις τιμές των $g_{\mu\nu}$

$$\left. \begin{array}{cccc} -1 - \frac{\kappa}{4\pi} \frac{M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \frac{\kappa}{4\pi} \frac{M}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \frac{\kappa}{4\pi} \frac{M}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 + \frac{\kappa}{4\pi} \frac{M}{r} \end{array} \right\} \quad (14)$$

⁷Σημ. Αμερικάνου Μεταφ.: Διορθώθηκε ένας όρος της μορφής $-\frac{\kappa}{2\pi} \frac{M}{r}$ με $\frac{\kappa}{2\pi} \frac{M}{r}$.

Ο κ. De Sitter μου έστειλε αυτές τις τιμές με επιστολή. Οι τιμές αυτές που διαφέρουν από εκείνες που προηγουμένως έδωσα μόνο στην επιλογή του συστήματος αναφοράς με οδήγησαν στην απλή προσεγγιστική λύση που έδωσα παραπάνω. Ωστόσο, θα πρέπει να έχουμε κατά νου ότι η επιλογή των συντεταγμένων που έχει γίνει εδώ δεν έχει ισοδύναμο στην γενική περίπτωση, καθώς το $\gamma_{\mu\nu}$ και το $\gamma'_{\mu\nu}$ έχουν τανυστικό χαρακτήρα μόνο ως προς γραμμικούς, ορθογώνιους μετασχηματισμούς αλλά όχι κάτω από γενικούς μετασχηματισμούς.

2 Επίπεδα βαρυτικά κύματα

Από τις εξισώσεις (6) και (9) προκύπτει ότι τα πεδία βαρύτητας πάντα διαδίδονται με ταχύτητα 1, δηλ. Με την ταχύτητα του φωτός. Τα επίπεδα βαρυτικά κύματα, που ταξιδεύουν κατά μήκος του θετικού άξονα X, μπορούν να βρεθούν θέτοντας

$$\gamma'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu} f(x_1 + ix_4) = \alpha_{\mu\nu} f(x - t) \quad (15)$$

Οι $\alpha_{\mu\nu}$ είναι σταθερές ενώ η f είναι συνάρτηση με όρισμα το $x - t$. Εάν ο υπό εξέταση χώρος είναι κενός, δηλαδή άδειος από ύλη, που σημαίνει ότι ο $T_{\mu\nu}$ είναι μηδενικός τότε οι εξισώσεις (6) ικανοποιούνται από λύση της μορφής (15). Οι εξισώσεις (4) δίνουν τις ακόλουθες σχέσεις μεταξύ για τα $\alpha_{\mu\nu}$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} + i\alpha_{14} &= 0 \\ \alpha_{12} + i\alpha_{24} &= 0 \\ \alpha_{13} + i\alpha_{34} &= 0 \\ \alpha_{14} + i\alpha_{44} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Συνεπώς, μόνο οι 6 από τις 10 σταθερές $\alpha_{\mu\nu}$ μπορούν να επιλεγούν ελεύθερα. Μπορούμε να παράξουμε τον πιο γενικό τύπο κύματος, μεταξύ αυτών που μελετώνται, από την υπέρθεση των ακόλουθων 6 τύπων κύματος :

$$\left. \begin{aligned} a) \quad & \alpha_{11} + i\alpha_{14} = 0 \quad , \quad \alpha_{14} + i\alpha_{44} = 0 \\ b) \quad & \alpha_{12} + i\alpha_{24} = 0 \\ c) \quad & \alpha_{13} + i\alpha_{34} = 0 \\ d) \quad & \alpha_{22} \neq 0 \\ e) \quad & \alpha_{23} \neq 0 \\ f) \quad & \alpha_{33} \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Αυτές οι σχέσεις μπορούν να κατανοηθούν για τον κάθε τύπο κύματος ως εξής: Καθορίζουν ποιες από τις συνιστώσες του $\alpha_{\mu\nu}$ το οποίο δεν είναι απόλυτα καθορισμένο είναι μη μηδενικές. Π.χ., για

τον τύπο $a)$ μόνο τα α_{11} , α_{14} και α_{44} είναι διάφορα του μηδενός, κλπ. Ο τύπος $a)$ έχει τις ιδιότητες συμμετρίας ενός διαμήκους κύματος, οι οι τύποι $b)$ και $c)$ είναι εγκάρσια κύματα, ενώ οι τύποι $d)$, $e)$ και $f)$ αντιστοιχούν σε νέο τύπο συμμετρίας. Οι τύποι $b)$ και $c)$ διαφέρουν ο ένας από τον άλλο μόνο στις κατευθύνσεις των αξόνων y και z τους. Το ίδιο ισχύει και για τους τύπους $d)$, $e)$, και $f)$, με αποτέλεσμα να υπάρχουν ουσιαστικά μόνο τρεις κύριοι τύποι κυμάτων.

Κυρίως μας ενδιαφέρει η μεταφορά ενέργειας από αυτά τα κύματα. Αυτή η μεταφορά μετριέται από το ρεύμα ενέργειας $\mathbf{g}_x = \frac{1}{i}t_{41}$. Από την (11) μπορούμε να υπολογίσουμε για τους διαφορετικούς τύπους κυμάτων⁸⁹:

$$\left. \begin{array}{l} a) \quad \frac{1}{i}t_{41} = \frac{f'^2}{4x}(\alpha_{11}^2 + \alpha_{14}^2 + \alpha_{44}^2) = 0 \\ b) \quad \frac{1}{i}t_{41} = \frac{f'^2}{2x}(\alpha_{12}^2 + \alpha_{24}^2) = 0 \\ c) \quad \frac{1}{i}t_{41} = \frac{f'^2}{2x}(\alpha_{13}^2 + \alpha_{34}^2) = 0 \\ d) \quad \frac{1}{i}t_{41} = \frac{f'^2}{4x}\alpha_{22}^2 = \frac{1}{4x}\left(\frac{\partial \gamma'_{22}}{\partial t}\right)^2 \\ e) \quad \frac{1}{i}t_{41} = \frac{f'^2}{4x}\alpha_{23}^2 = \frac{1}{4x}\left(\frac{\partial \gamma'_{23}}{\partial t}\right)^2 \\ f) \quad \frac{1}{i}t_{41} = \frac{f'^2}{4x}\alpha_{33}^2 = \frac{1}{4x}\left(\frac{\partial \gamma'_{33}}{\partial t}\right)^2 \end{array} \right\}$$

Επομένως, μόνο τα κύματα του τελευταίου τύπου όντως μεταφέρουν ενέργεια. Η μεταφερόμενη ενέργεια από κάθε επίπεδο κύμα είναι:

$$I_z = \frac{1}{i}t_{41} = \frac{1}{4x}\left[\left(\frac{\partial \gamma'_{22}}{\partial t}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \gamma'_{23}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma'_{33}}{\partial t}\right)^2\right] \quad (18)$$

⁸Σημ. Αμερικάνου Μεταφ.: Στις εκφράσεις b, c προστέθηκε ένας όρος 2 στο δεξιό μέλος ενώ στις εκφράσεις για τα d, e, f προστέθηκε η 41 συνιστώσα του t .

⁹Σημ. Έλλην. Μεταφ.: Από τη σχέση 11 έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} t_{41} &= \frac{1}{4\kappa} \left[\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_4} \frac{\partial \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_1} - \delta_{41} \sum_{\alpha\beta\tau} \left(\frac{\partial \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\tau} \right)^2 \right] \xleftrightarrow{15} \\ t_{41} &= \frac{1}{4\kappa} \left[\sum_{\alpha\beta} i \alpha_{\alpha\beta}^2 f'^2 \right] = \frac{i f'^2}{4\kappa} \sum_{\alpha\beta} \alpha_{\alpha\beta}^2 \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι στον παρονομαστή υπάρχει το κ και όχι το x . Συνεπώς στις παρακάτω εξισώσεις και στην (18) στους παρονομαστές θα πρέπει να υπάρχει το κ

3 Απώλεια ενέργειας των υλικών συστημάτων εξαιτίας εκπομπών κύματων βαρύτητας

Έστω ότι το σύστημα του οποίου την εκπομπή ακτινοβολίας θέλουμε να μελετήσουμε να είναι μόνιμα τοποθετημένο στη γειτονιά της αρχής των αξόνων. Θα μελετήσουμε το παραγώμενο από αυτό το σύστημα πεδίο βαρύτητας μόνο σε ένα σημείο του οποίου η απόσταση R από την αρχή των αξόνων είναι μεγάλη σε σύγκριση με τις διαστάσεις του συστήματος. Έστω ότι το σημείο αυτό βρίσκεται στον θετικό άξονα των x , δηλαδή έστω ότι:

$$x_1 = R, \quad x_2 = x_3 = 0$$

Τότε δημιουργείται το ερώτημα εάν υπάρχει ακτινοβολία που μεταφέρει ενέργεια στο σημείο αυτό του πεδίου, και αν η διεύθυνση διάδοσης της ενέργειας είναι αυτή του θετικού άξονα των x . Τα αποτελέσματα της παραγράφου §2 δείχνουν ότι τέτοια ακτινοβολία στο σημείο αυτό μπορεί να παραχθεί μόνο εξαιτίας της συνεισφοράς των g'_{22} , g'_{23} και g'_{33} .¹⁰

Συνεπώς αρκεί να υπολογίσουμε μόνο αυτές τις συνιστώσες. Από την (9) βρίσκουμε

$$\gamma'_{22} = -\frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{T_{22}(x_0, y_0, z_0, t-r)}{r} dV_0$$

Εάν το σύστημα έχει μικρές διαστάσεις και οι ενεργειακές του συνιστώσες δεν μεταβάλλονται πολύ γρήγορα, τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε χωρίς σημαντικό σφάλμα, τον όρο $t-r$ με τον όρο $t-R$ ο οποίος είναι σταθερός κατά την ολοκλήρωση. Εάν, επίσης, ο όρος $\frac{1}{r}$ αντικατασταθεί με τον

όρο $\frac{1}{R}$, τότε αποκτούμε μια προσεγγιστική εξίσωση ή οποία είναι ικανοποιητική για τις περισσότερες περιπτώσεις, και η οποία είναι:

$$\gamma'_{22} = -\frac{\kappa}{2\pi R} \int T_{22} dV_0 \quad (19)$$

όπου η ολοκλήρωση πραγματοποιείται με τον συμβατικό τρόπο, δηλαδή υπό σταθερό χρόνο. Με τη χρήση της (7) η έκφραση αυτή μπορεί να αντικατασταθεί από μία που θα είναι πιο βολική για τους υπολογισμούς μας σε υλικά συστήματα. Από την

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{24}}{\partial x_4} = 0$$

παίρνουμε μετά τον πολλαπλασιασμό της με x_2 και την ολοκλήρωση σε όλο το σύστημα, και στη συνέχεια την μερική ολοκλήρωση του δεύτερου όρου τη σχέση:

$$-\int T_{22} dV + \frac{\partial}{\partial x_4} \left(\int T_{24} x_2 dV \right) = 0 \quad (20)$$

¹⁰Σημ. Ελλην. Μεταφ. Σε όλη την παράγραφο §2 εμφανίζονται τα γ'_{22} , γ'_{23} και γ'_{33} και όχι τα g'_{22} , g'_{23} και g'_{33} . Επίσης και στις εξισώσεις των ειδών κύματος d, e, f εμφανίζονται τα γ'_{22} , γ'_{23} και γ'_{33} και όχι τα g'_{22} , g'_{23} και g'_{33} . Στο δε τέλος της παραγράφου ο Einstein υπολογίζει τα γ'_{22} , γ'_{23} και γ'_{33} .

Επιπλέον, από

$$\frac{\partial T_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{44}}{\partial x_4} = 0$$

και μετά τον πολλαπλασιασμό της με $\frac{x_2^2}{2}$ κάποιος παίρνει με έναν ανάλογο τρόπο:

$$- \int T_{24} x_2 dV + \frac{\partial}{\partial x_4} \left(\int T_{44} \frac{x_2^2}{2} dV \right) = 0 \quad (21)$$

Από τις (20) και (21) προκύπτει ότι:

$$\int T_{22} dV = \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \left(\int T_{44} \frac{x_2^2}{2} dV \right)$$

ή εισάγοντας πραγματικές συντεταγμένες και επιτρέποντας στον εαυτό του κάποιος να εξισώσει την πυκνότητα ενέργειας ($-T_{44}$) με την πυκνότητα μάζας ρ αυθαίρετα κινούμενων μαζών καταλήγει:

$$T_{22} dV = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int \rho y^2 dV \right) \quad (22)$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$\gamma'_{22} = -\frac{\kappa}{4\pi R} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int \rho y^2 dV \right) \quad (23)$$

Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε¹¹:

$$\gamma'_{33} = -\frac{\kappa}{4\pi R} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int \rho z^2 dV \right) \quad (23\alpha)$$

$$\gamma'_{23} = -\frac{\kappa}{4\pi R} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int \rho yz dV \right) \quad (23\beta)$$

Τα ολοκληρώματα στις (23), (23α) και (23β) δεν είναι τίποτα περισσότερο από χρονικά μεταβλητές ροπές αδράνειας και στη συνέχεια θα συμβολίζονται με τις συντομογραφίες J_{22} , J_{33} , J_{23} . Η ένταση $\mathfrak{g}_x$ του ρεύματος ενέργειας της ακτινοβολίας από τη (18) τότε δίνει¹²:

$$\mathfrak{g}_x = \frac{\kappa}{64\pi^2 R^2} \left[\left(\frac{\partial^3 J_{22}}{\partial t^3} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^3 J_{23}}{\partial t^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial^3 J_{33}}{\partial t^3} \right)^2 \right] \quad (20)$$

¹¹Σημ. Αμερικάνου Μεταφ.: Αντικαταστάθηκε ο όρος « y^2 » με « yz ».

¹²Σημ. Έλλην. Μεταφ. Στην εργασία του Einstein η εξίσωση αυτή είχε ως αρίθμηση το 20, το οποίο όμως είχε δοθεί ωρύτερα σε άλλη εξίσωση. Επίσης στην αγγλική μετάφραση η πρώτη τριπλή παράγωγος είχε προφανώς από τυπογραφικό λάθος $\frac{\partial^2 J_{22}}{\partial t^3}$

Από την εξίσωση αυτή προκύπτει, επίσης, ότι η μέση τιμή της ακτινοβολίας ενέργειας σε όλες τις κατευθύνσεις δίνεται από ¹²:

$$\frac{\kappa}{64\pi^2 R^3} \cdot \frac{2}{3} \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^3 J_{\alpha\beta}}{\partial t^3} \right)^2$$

όπου η άθροιση των δεικτών από το 1 έως το 3 θα πρέπει να επεκταθεί και στους 9 συνδυασμούς. Η αιτία για την οποία αυτή η έκφραση είναι από την μια αναλλοίωτη υπό χωρικές περιστροφές του συστήματος συντεταγμένων (όπως είναι εύκολα αντιληπτό από τον τρισδιάστατο ταυσιτικό χαρακτήρα των $J_{\alpha\beta}$ και από την άλλη, συμπίπτει με την (20) στην περίπτωση της ακτινικής συμμετρίας ($J_{11} = J_{22} = J_{33}$, $J_{23} = J_{31} = J_{12} = 0$). Συνεπώς πολλαπλασιάζοντας με $4\pi R^2$ κάποιος καταλήγει ότι η ακτινοβολία A του συστήματος ανά μονάδα χρόνου είναι ¹³:

$$A = \frac{\kappa}{24\pi} \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^3 J_{\alpha\beta}}{\partial t^3} \right)^2 \quad (21)$$

¹⁴ ¹⁵

Σε αυτή η έκφραση θα πρέπει να προστεθεί ένας επιπλέον παράγοντας $\frac{1}{c^4}$ εάν μετρήσουμε το χρόνο σε δευτερόλεπτα και την ενέργεια σε *Erg*. Θεωρώντας επιπλέον ότι $\kappa = 1,87 \cdot 10^{-27}$, είναι προφανές ότι η A έχει, σε όλες τις περιπτώσεις που μπορεί να φανταστεί κανείς, μια πρακτικά μηδενική τιμή.

Παρόλα αυτά, λόγω της κίνησης των ηλεκτρονίων στο εσωτερικό των ατόμων, τα άτομα θα πρέπει να ακτινοβολούν όχι μόνο ηλεκτρομαγνητική αλλά και βαρυτική ενέργεια, αν και μόνο σε μικρές ποσότητες. Δεδομένου ότι αυτό μάλλον δεν είναι αληθές στη φύση, φαίνεται ότι η κβαντική θεωρία θα πρέπει να τροποποιήσει όχι μόνο τη ηλεκτροδυναμική κατά Maxwell, αλλά και τη νέα θεωρία της βαρύτητας. ¹⁶

¹²Σημ. Έλλην. Μεταφ.: Στην αγγλική μετάφραση ο πρώτος όρος δίνεται από $\frac{\kappa}{64\pi^2 R^3}$ σε αντίθεση με την προηγούμενη εξίσωση όπου είναι $\frac{\kappa}{64\pi^2 R^2}$. Στη συνέχεια ο Einstein πολλαπλασιάζει με $4\pi R^2$ και η ακτίνα φεύγει. Θα πρέπει να είναι

R^2 και όχι R^3 και σε συμφωνία με τις εξισώσεις (28),(29) του [2]

¹³Σημ. Αμερικάνου Μεταφ. Είναι η δεύτερη φορά σε αυτή την εργασία που σε μια εξίσωση δίνεται ο αριθμός (21)

¹⁴Σημ. Έλλην. Μεταφ.: Ο Einstein προτείνει έναν πολλαπλασιασμό με $4\pi R^2$ με αποτέλεσμα να φύγει εντελώς η ακτίνα από την ακτινοβολία A . Προφανώς θα πρέπει να υπάρχει λάθος και η δύναμη του R να είναι 2 και όχι 3

¹⁵Σημ. Έλλην. Μεταφ.: Στην εργασία του του 1918 [2] ο Einstein διορθώνοντας το λάθος του καταλήγει στην εξής εξίσωση:

$$4\pi R^2 \bar{S} = \frac{\kappa}{80\pi} \left[\sum_{\mu\nu} \ddot{J}_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \left(\sum_{\mu} \ddot{J}_{\mu\mu} \right)^2 \right]$$

όπου $\bar{S}$ η μέση πυκνότητα της ακτινοβολίας. Το συμπέρασμα που καταλήγει είναι: «Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι ένα μηχανικό σύστημα το οποίο παραμένει σταθερά σε σφαιρική συμμετρία δεν ακτινοβολεί.»

¹⁶Σημ. Έλλην. Μεταφ. Η υπογράμμιση αυτής της παραγράφου ανήκει στον έλληνα μεταφραστή ο οποίος τη θεωρεί πολύ

4 Συμπλήρωμα

Υπάρχει ένας απλός τρόπος για να διευκρινιστεί το παράξενο αποτέλεσμα ότι υπάρχουν βαρυτικά κύματα (των τύπων a, b, c) τα οποία δεν μεταφέρουν καθόλου ενέργεια. Ο λόγος είναι ότι δεν είναι «πραγματικά» κύματα, αλλά μάλλον «φαινομενικά» κύματα, τα οποία εμφανίζονται λόγω της επιλογής ενός συστήματος αναφοράς του οποίου η αρχή των αξόνων υποκειται σε κυματοειδείς διαταραχές. Αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό με τον ακόλουθο τρόπο. Αν κάποιος επιλέξει από την αρχή ένα σύστημα συντεταγμένων με τον συνήθη τρόπο έτσι ώστε το $\sqrt{-g} = 1$ ¹⁷ κάποιος καταλήγει αντί για την (2) σε εξισώσεις πεδίου όπου απουσιάζει η ύλη:

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu} \partial x_{\alpha}} + \frac{\partial^2 \gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu} \partial x_{\alpha}} - \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}^2} = 0$$

Αντικαθιστώντας σε αυτήν την εξίσωση

$$\gamma_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu} f(x_1 + ix_4)$$

κάποιος καταλήγει σε ένα σετ 10 εξισώσεων μεταξύ των σταθερών $\alpha_{\mu\nu}$ από τις οποίες φαίνεται ότι μόνο οι a_{22} , a_{33} και a_{23} μπορεί να είναι μη μηδενικές (και όπου $a_{22} + a_{33} = 0$). Με αυτή την επιλογή του συστήματος αναφοράς υπάρχουν μόνο οι τύποι κυμάτων (d, e, f), οι οποίοι και μεταφέρουν ενέργεια. Όλοι οι άλλοι τύποι κυμάτων έχουν εξαλειφθεί από αυτή την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων, συνεπώς αυτοί οι τύποι κυμάτων δεν είναι «πραγματικά» κύματα. Αν και είναι εποικοδομητικό για την μελέτη αυτή να μην περιορισθούμε σε ένα συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων για την μελέτη της πρώτης προσέγγισης των εξισώσεων πεδίου, το τελευταίο μας αποτέλεσμα δείχνει, ωστόσο, ότι ένα σύστημα συντεταγμένων που υπακούει στη συνθήκη $\sqrt{-g} = 1$ έχει βαθύ φυσικό νόημα¹⁸.

Αναφορές

- [1] A. Einstein, "Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity" , Sitzungbericht. 47 (1915) p. 833
- [2] A. Einstein, "About gravitational waves" , Sitzungsberichte (1918) p. 154

σημαντική καθώς δείχνει την ικανότητα του Einstein να αντιλαμβάνεται αμέσως το πρόβλημα που εισάγει η ύπαρξη της βαρυτικής ακτινοβολίας στην ΓΘΣ και να προβλέπει την ανάγκη τροποποίησης της. Η παρατήρηση αυτή δεν επηρεάζεται από το λάθος στους υπολογισμούς καθώς στο [2] ο Einstein καταλήγει στο ότι ένα σύστημα που διατηρεί τη σφαιρική του συμμετρία δε ακτινοβολεί ενέργεια υπό μορφή βαρυτικών κυμάτων. Σήμερα γνωρίζουμε ότι τα νουκλεόνια στον πυρήνα ταλαντώνονται συνέχεια συνεπώς δεν υπάρχει απόλυτη σταθερή σφαιρική συμμετρία.

¹⁷Σημ. Αμερικάνου Μεταφ.: « $\sqrt{g}$ » διορθώθηκε σε « $\sqrt{-g}$ »

¹⁸Σημ. Έλλην. Μεταφ. Στην εργασία του του 1918 [2] για τα βαρυτικά κύματα ο Einstein διορθώνει το μαθηματικό λάθος του και καταλήγει στο ότι δεν χρειάζεται η συνθήκη για τις συντεταγμένες $\sqrt{-g} = 1$.