

Κοσμολογικές Θεωρήσεις στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der
Gravitation

Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin).
Sitzungsberichte (1917) σελ. 142-152.

Υποβλήθηκε στις 8 Φεβρουαρίου 1917, δημοσιεύθηκε στις
15 Φεβρουαρίου 1917

Albert Einstein

6 Σεπτεμβρίου 2023

Είναι ήδη γνωστό ότι η εξίσωση Poisson

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = 4\pi\kappa\rho \quad (1)$$

σε συνδυασμό με τις εξισώσεις κίνησης ενός υλικού σημείου δεν είναι από μόνες τους ένα τέλει υποκατάστατο της θεωρίας της δράσης του Newton από απόσταση. Για να γίνουν ένα πλήρες υποκατάστατο θα πρέπει ακόμη να ληφθεί υπόψη η προϋπόθεση ότι στο χωρικό άπειρο το δυναμικό φ τείνει προς μια σταθερή οριακή τιμή¹. Υπάρχει μια ανάλογη κατάσταση των πραγμάτων στη θεωρία της βαρύτητας όπως αυτή παρουσιάζεται στη γενική σχετικότητα. Και σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να συμπληρώσουμε τις διαφορικές εξισώσεις εισάγοντας οριακές συνθήκες στο χωρικό άπειρο, αν πραγματικά πρέπει να θεωρήσουμε το σύμπαν ως άπειρη χωρική έκταση.²

Στη μελέτη μου για το πλανητικό πρόβλημα επέλεξα τις ακόλουθες οριακές συνθήκες με τη χρήση της εξής υπόθεσης: “Είναι δυνατό να επιλέξουμε ένα σύστημα αναφοράς έτσι ώστε στο χωρικό άπειρο να γίνουν σταθερά όλα τα βαρυτικά δυναμικά”.^{3, 4}

Όμως δεν είναι καθόλου προφανές ότι μπορούμε να θεσπίσουμε τις ίδιες οριακές συνθήκες όταν θέλουμε να μελετήσουμε μεγαλύτερα τμήματα του φυσικού σύμπαντος. Στις επόμενες σελίδες θα δοθούν οι σχέσεις που έχω κάνει μέχρι σήμερα σχετικά με αυτό το θεμελιωδώς σημαντικό ζήτημα

1 Η θεωρία του Newton

Είναι γνωστό ότι οι οριακές συνθήκες του Newton που θέτουν μια σταθερή οριακή τιμή για το φ στο χωρικό άπειρο οδηγεί στην άποψη ότι η πυκνότητα της ύλης καθίσταται μηδενική στο άπειρο. Γιατί μπορούμε να φαντάσσουμε ότι μπορεί να υπάρχει μια θέση στο παγκόσμιο χώρο γύρω από την οποία το βαρυτικό πεδίο της ύλης, όπως παρατηρείται σε μεγάλη κλίμακα, παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία⁴.

Στη συνέχεια προκύπτει από την εξίσωση Poisson ότι, για να μπορεί το φ να τείνει σε μια οριακή τιμή στο άπειρο, η μέση πυκνότητα ρ θα πρέπει να τείνει προς το μηδέν πιο γρήγορα από το $\frac{1}{r^2}$ καθώς

¹Σημ. Έλλην. Μεταφ. Τα προβλήματα αυτά είναι πια γνωστά ως προβλήματα συνοριακών συνθηκών όπου δίνονται σε μια συνοριακή επιφάνεια οριακές συνθήκες Dirichlet (όπου δίνονται οι τιμές του δυναμικού) ή Neumann (όπου στο σύνορο δίνεται η τιμή της παραγώγου του δυναμικού) ή Cauchy (όπου δίνεται και η τιμή του δυναμικού αλλά και η τιμή της παραγώγου του) και στη συνέχεια επιλύεται στο ωρο η εξίσωση Poisson ή Laplace.

²Σημ. Αμερικάνου Μεταφ. Ο Einstein είχε ήδη σκεφτεί το πρόβλημα της επιλογής των οριακών συνθηκών στο άπειρο την άνοιξη του 1916 (βλ. Einstein στον Michele Besso, 14 Μαΐου 1916, όπου αναφέρει επίσης ότι το Σύμπαν είναι πεπερασμένο).

³Σημ. Αμερικάνου Μεταφ. Στο Einstein 1915h (Doc 24) p.833 για μια συζήτηση για τις συνοριακές συνθήκες για το πλανητικό πρόβλημα.

⁴Σημ. Έλλην. Μεταφ.

⁴Σημ. Έλλην. Μεταφ. Αυτό τότε θα είναι το κέντρο του Σύμπαντος. Αλλά δεν πρέπει να το θεωρήσουμε ένα απόλυτο σύστημα αναφοράς

η απόσταση r από το κέντρο αυξάνεται. ⁵⁶⁷

Υπό αυτή την έννοια, επομένως, το σύμπαν σύμφωνα με τον Newton είναι πεπερασμένο, αν και μπορεί να διαθέτει μια απείρως μεγάλη συνολική μάζα. ⁷⁸⁹

Από αυτό προκύπτει ως αρχικό συμπέρασμα ότι η ακτινοβολία που εκπέμπεται από τα ουράνια σώματα θα αφήσει, εν μέρει, το κατά Newton σύστημα του σύμπαντος καθώς θα κινηθεί ακτινικά προς τα έξω, με τελικό αποτέλεσμα να χαθεί στο άπειρο και αυτή και η οποιαδήποτε αλληλεπίδραση της με το Σύμπαν. Αυτή η σκέψη γεννά την εξής ερώτηση: Δεν μπορούν να παρουσιάσουν ανάλογη συμπεριφορά και τα ουράνια σώματα; Είναι πολύ δύσκολο να δοθεί αρνητική απάντηση σε αυτή την ερώτηση. Και αυτό καθώς από την παραδοχή της ύπαρξης μιας πεπερασμένης οριακής τιμής για το φ στο χωρικό άπειρο προκύπτει ότι ένα ουράνιο σώμα με πεπερασμένη κινητική ενέργεια μπορεί να φτάσει στο χωρικό άπειρο, ξεπερνώντας τις κατά Newton ελκτικές δυνάμεις.¹⁰ Από τους νόμους της στατιστικής μηχανικής γνωρίζουμε ότι τέτοιες περιπτώσεις θα πρέπει να εμφανίζονται από καιρό σε καιρό, αρκεί η συνολική ενέργεια του αστρικού συστήματος - που μεταφέρεται σε ένα μόνο αστέρι - να είναι αρκετά μεγάλη για να εκτοξεύσει αυτό το αστέρι στο ταξίδι του στο άπειρο, ένα ταξίδι από το

⁵Σημ. Einstein : ρ είναι η μέση πυκνότητα της ύλης υπολογισμένη σε μια περιοχή η οποία είναι αρκετά μεγάλη σε σύγκριση με την απόσταση ανάμεσα σε γειτονικά άστρα αλλά μικρή σε σύγκριση με το συνολικό αστρικό σύστημα.

⁶Σημ. Έλλην. Μεταφ. Εδώ ο Einstein με την έκφραση αστρικό σύστημα εννοεί το συνολικό σύστημα των άστρων και όχι ένα πλανητικό σύστημα γύρω από ένα μονό ή ένα πολλαπλό αστρο

⁷Σημ. Έλλην. Μεταφ. Η εξίσωση Poisson σε σφαιρικές συντεταγμένες και με τέλεια σφαιρική συμμετρία (χωρίς εξάρτηση από τα θ και ϕ) γράφεται:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}) = 4\pi k \rho$$

Θέτοντας $\rho = \frac{a}{r^n}$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}) &= \frac{4\pi k a}{r^n} \stackrel{\beta=4\pi k a}{=} \frac{\beta}{r^n} \iff (r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}) = \int \beta r^{2-n} dr \iff r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\beta r^{2-n+1}}{2-n+1} + C = \frac{\beta r^{3-n}}{3-n} + C \iff \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{\beta r^{1-n}}{3-n} + \frac{C}{r^2} \iff \varphi = \int \frac{\beta r^{1-n}}{3-n} dr + \int \frac{C}{r^2} dr \iff \varphi = \frac{\beta r^{2-n}}{(3-n)(2-n)} - \frac{C}{r} + C' \end{aligned}$$

Ο δεύτερος όρος τείνει στο 0 όταν το $r \rightarrow \infty$. Για να συμβεί το ίδιο και με τον πρώτο όρο θα πρέπει $n > 2$.

⁷Σημ. Einstein ρ είναι η μέση πυκνότητα της ύλης υπολογισμένη σε μια περιοχή η οποία είναι αρκετά μεγάλη σε σύγκριση με την απόσταση ανάμεσα σε γειτονικά άστρα αλλά μικρή σε σύγκριση με το συνολικό αστρικό σύστημα.

⁸Σημ. Έλλην. Μεταφ. Εδώ ο Einstein με την έκφραση αστρικό σύστημα εννοεί το συνολικό σύστημα των άστρων και όχι ένα πλανητικό σύστημα γύρω από ένα μονό ή ένα πολλαπλό αστρο

⁹Σημ. Έλλην. Μεταφ. Σε αυτή την περίπτωση η μάζα του Σύμπαντος θα είναι:

$$M = \int_0^\infty \rho 4\pi r^2 dr \stackrel{\rho=\frac{a}{r^n}}{=} 4\pi a \int_0^\infty r^{2-n} dr = 4\pi a \frac{r^{3-n}}{3-n} \Big|_0^\infty$$

¹⁰Σημ. Έλλην. Μεταφ. Εδώ ο Einstein ουσιαστικά αναρωτιέται αν τα άστρα συμπεριφέρονται σαν σώματα μπροστά σε ένα βαρυτικό φραγμό δυναμικό, μια κατάσταση παρόμοια με αυτή των μορίων των αερίων σε πλανητικές ατμόσφαιρες. Τα μόρια σε αυτή την περίπτωση ακολουθούν μια κατανομή Maxwell, και καποια απο αυτά διαφεύγουν τελικά από την ατμόσφαιρα.

οποίο δεν μπορεί ποτέ να επιστρέψει.¹¹

Μπορούμε βέβαια να προσπαθήσουμε να αποφύγουμε αυτή την περίεργη δυσκολία, θέτοντας μια πολύ υψηλή τιμή στο περιοριστικό βαρυτικό δυναμικό στο άπειρο. Αυτή θα ήταν μια πιθανή απάντηση σε αυτή τη δυσκολία, αν η τιμή του βαρυτικού δυναμικού δεν καθοριζόταν από τα ίδια τα ουράνια σώματα. Η πραγματικότητα είναι ότι είμαστε υποχρεωμένοι να θεωρήσουμε την εμφάνιση οποιωνδήποτε μεγάλων διαφορών δυναμικού του βαρυτικού πεδίου ως αντιφατικές με τα παρατηρούμενα γεγονότα. Αυτές οι διαφορές δυναμικού θα πρέπει να παίρνουν τόσο μικρών τάξεων μεγέθους τιμές ώστε η αστρική ταχύτητα που παράγεται από αυτές να μην υπερβαίνει τις ταχύτητες που παρατηρούνται πραγματικά.¹²

Εάν εφαρμόσουμε τον νόμο του Boltzmann για τη κατανομή των μορίων των αερίων στα αστέρια, παρομοιάζοντας το αστρικό σύστημα με ένα αέριο σε θερμική ισορροπία, διαπιστώνουμε ότι το κατά Newton αστρικό σύστημα δεν μπορεί να υπάρχει καθόλου. Γιατί υπάρχει μια πεπερασμένη αναλογία πυκνοτήτων που αντιστοιχούν στην πεπερασμένη διαφορά δυναμικού ανάμεσα στο κέντρο και στο χωρικό άπειρο¹³. Ένας μηδενισμός της πυκνότητας στο άπειρο θα οδηγούσε και σε αντίστοιχο μηδενισμό της πυκνότητας στο κέντρο.

Αρχικά φαίνεται πολύ δύσκολο να ξεπεραστούν αυτές οι δυσκολίες στη βάση της κατά Newton θεωρίας της βαρύτητας. Μπορούμε να αναρωτηθούμε αν μπορούν να ξεπεραστούν τροποποιώντας την κατά Newton θεωρία της βαρύτητας. Πρώτα απ' όλα θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο που δεν θα πρέπει ληφθεί σοβαρά υπόψη, απλώς χρησιμεύει ως ένας οδηγός για το τι πρόκειται να ακολουθήσει στη συνέχεια. Στη θέση της εξίσωσης Poisson γράφουμε

$$\nabla^2 \varphi - \lambda \varphi = 4\pi\kappa\rho \quad (2)$$

όπου λ είναι μια παγκόσμια σταθερά¹⁴. Αν ρ_0 είναι η πυκνότητα μιας ομογενούς κατανομής μάζας τότε η λύση της 2 είναι:

$$\varphi = -\frac{4\pi\kappa}{\lambda}\rho_0 \quad (3)$$

Αυτή η λύση θα αντιστοιχούσε στην περίπτωση κατά την οποία η ύλη των σταθερών σε θέση αστεριών ήταν κατανεμημένη ομοιόμορφα μέσα στο χώρο, όπου τότε η πυκνότητα ρ_0 θα ήταν ίση με την

¹¹Σημ. Αμερικάνου Μεταφ. Αυτό το πρόβλημα που παρουσιάζεται στην κατά Newton θεωρία της βαρύτητας συζητείται επίσης στο Einstein 1917a (έγγραφο 42), σελ. 71-72. Αναφέρεται επίσης ότι είχαν προταθεί τροποποιήσεις στο βαρυτικό δυναμικό στα τέλη του 19ου αιώνα για να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία (βλ. Seeliger 1895 και Neumann, C. 1896· βλ. επίσης North 1965, κεφάλαιο 2, για μια ιστορική συζήτηση του προβλήματος)

¹²Σημ. Έλλην. Μεταφ. Η υπογράμμιση είναι του έλληνα μεταφραστή

¹³Σημ. Έλλην. Μεταφ. Αν τα άστρα ακολουθούν μια κατανομή Maxwell-Boltzmann τότε η συγκέντρωσή τους θα είναι $n = n_0 e^{(E-E_r)/kT}$ όπου E_r η τιμή της δυναμικής ενέργειας στο αντίστοιχο σημείο. Επομένως ο λόγος αυτών των συγκεντρώσεων ενός σημείου στο άπειρο και του κέντρου του σύμπαντος θα περιέχει τον όρο $E_\infty - E_0$.

¹⁴Σημ. Έλλην. Μεταφ. Η εξίσωση αυτή προτάθηκε ανεξάρτητα από τους Neumann, C. 1896. "Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen". Teubner, Leipzig. pp 373-379; Seeliger, H. von 1895 "Über das Newtonsche Gravitationsgesetz". Astron.Nach. 137: 129-136; Seeliger, H. von 1896 "Über das Newtonsche Gravitationsgesetz" Sitz.König. Bayer. Akad. Wiss.126: 373-400. Από την Cormac O' Raifeartaigh et. al. 1917, European Physical Journal H, The 42(11), January 2017

πραγματική τιμή της μέσης πυκνότητας της ύλης στο σύμπαν. Η λύση τότε θα αντιστοιχούσε σε μια άπειρη επέκταση του κεντρικού χώρου, η οποία θα ήταν ομοιόμορφα γεμάτη με την ύλη. Εάν, χωρίς να επιφέρουμε καμία μεταβολή στην τιμή της μέσης πυκνότητας, φανταστούμε ότι η ύλη δεν είναι ομοιόμορφα κατανομημένη τοπικά, τότε θα υπάρχει, πέρα από την σταθερή τιμή του φ που βρήκαμε στη 3, και ένα πρόσθετο φ , το οποίο σε γειτονικές περιοχές πυκνότερων μαζών θα μοιάζει πολύ περισσότερο με το κατά Newton πεδίο, καθώς το $\lambda\varphi$ είναι μικρότερο σε σύγκριση με το $4\pi k\rho$.¹⁴

Ένα τέτοιο σύμπαν δεν θα πρέπει να έχει κανένα κέντρο, σε σχέση με το βαρυτικό του πεδίο. Δεν θα πρέπει να υποτεθεί ότι θα μειωθεί η πυκνότητα στο χωρικό άπειρο, αλλά τόσο το μέσο δυναμικό όσο και η μέση πυκνότητα θα παραμείνουν σταθερά στο άπειρο. Η αντίθεση με τη στατιστική μηχανική που βρήκαμε στην περίπτωση της κατά Newton θεωρίας δεν επαναλαμβάνεται¹⁵. Με μια ορισμένη αλλά εξαιρετικά μικρή πυκνότητα, η ύλη θα βρίσκεται σε ισορροπία, χωρίς να απαιτούνται εσωτερικές δυνάμεις υλικού (πιέσεις) για τη διατήρηση της ισορροπίας.

2 Οι συνοριακές συνθήκες σύμφωνα με τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Στην παρούσα παράγραφο θα οδηγήσω τον αναγνώστη στο δρόμο που εγώ ταξίδεψα, ένα μάλλον τραχύ δρόμο, διότι αλλιώς δεν μπορώ να ελπίζω ότι θα επιδείξει μεγάλο ενδιαφέρον για το αποτέλεσμα στο τέλος του ταξιδιού. Το συμπέρασμα στο οποίο θα φτάσω είναι ότι οι εξισώσεις πεδίου της βαρύτητας που έχω υποστηρίξει μέχρι σήμερα χρειάζονται μια μικρή τροποποίηση, έτσι ώστε με βάση τη γενική θεωρία της σχετικότητας να αποφευχθούν αυτές οι θεμελιώδεις δυσκολίες που έχουν διατυπωθεί στην 1 όταν μελετήσαμε την κατά Newton θεωρία της βαρύτητας. Αυτή η τροποποίηση αντιστοιχεί τέλεια στη μετάβαση από την εξίσωση Poisson 1 στην εξίσωση 2 της 1. Τελικά συμπεραίνουμε ότι οι οριακές συνθήκες στο χωρικό άπειρο εξαφανίζονται τελείως, διότι το συμπαντικό συνεχές θα πρέπει να θεωρηθεί σε σχέση με τις χωρικές διαστάσεις ως ένα αυτοτελές πεπερασμένο χωρικό (δηλαδή έχων τρισδιάστατο όγκο) συνεχές.

Η άποψη που διατύπωνα μέχρι πρόσφατα όσον αφορά τις οριακές συνθήκες που πρέπει να καθοριστούν στο χωρικό άπειρο, στηρίχθηκε στις ακόλουθες σκέψεις. Σε μια συνεπή θεωρία της σχετικότητας δεν μπορεί να υπάρξει αδράνεια *σχετιζόμενη με το "χώρο"*, αλλά μόνο αδράνεια των μαζών η οποία οφείλεται στην αλληλεπίδραση μεταξύ τους.^{16 17}

¹⁴Σημ. Αμερικάνου Μεταφ. $\lambda\varphi$ θα πρέπει να είναι $\lambda\varphi$

¹⁵Σημ. Έλλην. Μεταφ. Η ομογενής εξίσωση $\bar{\nabla}^2\varphi = 0$ θα μας δώσει μηδενική λύση στο άπειρο, ενώ ο συμπληρωματικός όρος $-\lambda\varphi = 4\pi k\rho$ θα μας δώσει τη μη μηδενική λύση της πυκνότητας στο άπειρο

¹⁶Σημ. Αμερικάνου Μεταφ. Αυτή η δήλωση συνοψίζει την ερμηνεία του Einstein για την "αρχή του Mach". Δείτε το Einstein 1916c (έγγραφο 29), σημείωση 4, για περισσότερα σχετικά με το ρόλο που διαδραμάτισαν οι ιδέες του Mach στη σκέψη του Einstein. Δείτε επίσης τα σχόλια του Einstein σχετικά με τη σχετικότητα της αδράνειας (και γενικά για την παρούσα εργασία) στο γράμμα του Einstein στον Felix Klein, της 26 Μαρτίου 1917

¹⁷Σημ. Έλλην. Μεταφ. Ο Einstein στο [2] γράφει για τις αρχές που τον οδήγησαν στην διατύπωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας: "

(α) **Αρχή της σχετικότητας.** Οι νόμοι της φύσης είναι απλώς περιγραφές χωρο-χρονικών συμπτώσεων. Επομένως, βρίσκουν τη μοναδική τους φυσική έκφραση σε γενικά συναλλοίωτες εξισώσεις.

Αν συνεπώς, έχω μια μάζα σε αρκετά μεγάλη απόσταση από όλες τις άλλες μάζες του σύμπαντος, η αδράνεια της πρέπει να μηδενίζεται. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να διατυπώσουμε αυτή την πρόταση μαθηματικά.

Σύμφωνα με τη γενική θεωρία της σχετικότητας, η αρνητική ορμή δίνεται από τις πρώτες τρεις συνιστώσες, ενώ η ενέργεια από την τελευταία συνιστώσα του συναλλοιώτου τανυστή πολλαπλασιασμένου

(β) **Αρχή της ισοδυναμίας.** Η αδράνεια και η βαρύτητα είναι ταυτόσημα φαινόμενα στη φύση. Από αυτό και από την ειδική θεωρία της σχετικότητας προκύπτει αναγκαστικά ότι ο συμμετρικός «θεμελιώδης τανυστής» καθορίζει τις μετρικές ιδιότητες του χώρου, την αδρανειακή συμπεριφορά των σωμάτων σε αυτό το χώρο, καθώς και τα βαρυτικά αποτελέσματα. Θα ονομάσουμε την κατάσταση του χώρου που περιγράφεται από αυτόν τον θεμελιώδη τανυστή στο «πεδίο G ».

(γ) **Η αρχή του Mach** Το πεδίο G καθορίζεται πλήρως από τις μάζες των σωμάτων. Δεδομένου ότι η μάζα και η ενέργεια είναι -σύμφωνα με τα αποτελέσματα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας- ταυτόσημες και καθώς η ενέργεια περιγράφεται από τον συμμετρικό ενεργειακό τανυστή $T_{\mu\nu}$, προκύπτει ότι το πεδίο G προκαλείται και προσδιορίζεται από τον ενεργειακό τανυστή της ύλης. Μέχρι τώρα δεν είχα κρατήσει τις αρχές (α) και (γ) ξεχωριστά, αλλά αυτό αποδείχθηκε ότι δημιουργεί συγχύσεις. Επέλεξα το όνομα «Η αρχή του Mach» γιατί η αρχή που διατυπώνω εδώ είναι η γενίκευση της Αρχής του Mach η οποία υποστηρίζει ότι η αδράνεια μειώνεται από τις αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα σώματα.

Η αρχή του Mach (γ) είναι μια διαφορετική ιστορία. Η αναγκαιότητα να την υποστηρίξουμε δεν είναι σε καμία περίπτωση αποδεκτή από όλους τους συναδέλφους, αλλά εγώ ο ίδιος θεωρώ ότι είναι απολύτως απαραίτητο να την δεχθούμε. Με το (γ), σύμφωνα με τις εξισώσεις πεδίου της βαρύτητας, δεν μπορεί να υπάρχει G -πεδίο χωρίς ύλη. Προφανώς, ο ισχυρισμός (γ) συνδέεται στενά με τη χωροχρονική δομή του Σύμπαντος στο σύνολό του, επειδή όλες οι μάζες στο σύμπαν θα συμμετέχουν στη δημιουργία του πεδίου G . Αρχικά πρότεινα για τις εξισώσεις πεδίου της βαρύτητας

$$G_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)$$

με $\sqrt{-g}$ ¹⁸

$$m\sqrt{-g} \quad g_{\mu\alpha} \frac{dx_\alpha}{ds} \quad (4)$$

όπου ως συνήθως έχουμε ¹⁹:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad (5)$$

Στην ιδιαίτερα επιφανειακή περίπτωση της δυνατότητας επιλογής του συστήματος των συντεταγμένων έτσι ώστε το βαρυτικό πεδίο σε κάθε σημείο να είναι ισότροπο στο χώρο, έχουμε πιο απλά

$$ds^2 = -A(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + Bdx_4^2$$

Αν ταυτόχρονα ισχύει ότι:

$$\sqrt{-g} = 1 = \sqrt{A^3 B}$$

τότε από την 4 βγάζουμε σε πρώτη προσέγγιση και για μικρές ταχύτητες για τις συνιστώσες της

¹⁸Σημ. Έλλην. Μεταφ. Από τον τανυστή ενεργειας ορμής $T^{\mu\nu}$ έχουμε ότι οι συνιστώσες T^{i4} όπου $i = 1, 2, 3$ είναι οι πυκνότητες της ορμής και η T^{44} η πυκνότητα της ενέργειας. Για την περίπτωση του κωνιορτού έχουμε ότι $T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$ όπου u^μ η τετραταχύτητα. Αν στο τοπικό σύστημα ηρεμίας ο στοιχειώδης όγκος είναι $dV = dx^1 dx^2 dx^3$ τότε ο αντίστοιχος τετραδιάστατος όγκος είναι $dV_{4d} = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 \stackrel{dx^4 = d\tau = ds}{=} ds dV$. Σε ένα άλλο (καμπυλόγραμμο) σύστημα συντεταγμένων ο τριδιάστατος όγκος dV' θα είναι:

$$\left[\begin{array}{ll} dV' = dx'^1 dx'^2 dx'^3 & dV = dx^1 dx^2 dx^3 \\ dx_4^i = u^i ds & dx_a^i = \delta_a^i dx^a \\ dV_{4d} = (-g)^{1/2} d\Omega_{4d} & d\Omega_{4d} = e_{jklr} dx_1^j dx_2^k dx_3^l dx_4^r \end{array} \right] \iff dV_4 = (-g)^{1/2} u^4 dV$$

Συνεπώς το $\sqrt{-g}$ προέρχεται από τον μετασχηματισμό του όγκου από το ένα σύστημα αναφοράς στο άλλο. Οι συνιστώσες της χωρικής ορμής είναι πολύ απλά:

$$p^\mu = m g_{\mu\alpha} \frac{dx^\alpha}{ds}$$

¹⁹Σημ. Έλλην. Μεταφ. Θα πρέπει τα διαφορικά των συντεταγμένων να είναι ανταλλοίωτα, δηλαδή $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

ορμής²⁰:

$$m \frac{A}{\sqrt{B}} \frac{dx_1}{dx_4}, m \frac{A}{\sqrt{B}} \frac{dx_2}{dx_4}, m \frac{A}{\sqrt{B}} \frac{dx_3}{dx_4}$$

ενώ για την ενέργεια

$$m\sqrt{B} \quad (1)$$

Από τις σχέσεις για την ορμή βγαίνει ότι η ποσότητα $m \frac{A}{\sqrt{B}}$ παίζει το ρόλο της μάζας ηρεμίας του

σώματος. Καθώς το m είναι μια σταθερά συνδεδεμένη με το υλικό σημείο, ανεξάρτητη της θέσης του, αν διατηρήσουμε τη σχέση $\sqrt{-g} = 1$ στο χωρικό άπειρο τότε η σχέση για τη μάζα ηρεμίας μπορεί να μηδενιστεί στο χωρικό άπειρο μόνο όταν το A μηδενισθεί ενώ το B απειρίζεται²¹. Αυτό σημαίνει ότι μια τέτοια συμπεριφορά όλων των συντελεστών $g_{\mu\nu}$ απαιτείται για την αδράνεια από το Αξίωμα της Σχετικότητας. Αυτό το αποτέλεσμα σημαίνει ότι **η δυναμική ενέργεια $m\sqrt{B}$ απειρίζεται στο άπειρο**²². Συνεπώς ένα υλικό σημείο δεν μπορεί ποτέ να εγκαταλείψει το σύστημα. Μια πιο αναλυτική μελέτη δείχνει ότι το ίδιο συμβαίνει και για μια φωτεινή ακτίνα. Ένα Σύμπαν με αυτή την συμπεριφορά των βαρυτικών δυναμικών στο άπειρο δεν θα υπόκειται στον κίνδυνο να διαλυθεί λόγω διαρροής μάζας όπως παρουσιάσαμε πριν λίγο ότι συμβαίνει με τον κατά Newton Σύμπαν²³.

Θα ήθελα να τονίσω ότι οι υπεραπλουστευμένες υποθέσεις για το βαρυτικό δυναμικό στις οποίες στηρίζεται το παραπάνω αποτέλεσμα έχουν εισαχθεί κυρίως για λόγους κατανόησης. Είναι δυνατό να βρεθούν γενικές σχέσεις για τη συμπεριφορά του $g_{\mu\nu}$ στο άπειρο που θα εκφράζουν τη συμπεριφορά της $g_{\mu\nu}$ χωρίς άλλες περιοριστικές υποθέσεις.

Σε αυτό το στάδιο, με την ευγενική βοήθεια του μαθηματικού J. Grommer²³, διερεύνησα κεντρικά συμμετρικά, στατικά βαρυτικά πεδία, τα οποία εκφυλίζονται στο άπειρο με τον τρόπο που αναφέρθηκε νωρίτερα. Χρησιμοποιήθηκαν τα βαρυτικά δυναμικά $g_{\mu\nu}$, και από αυτά υπολογίστηκε ο ταυοστής ενέργειας $T_{\mu\nu}$ της ύλης από τις εξισώσεις πεδίου της βαρύτητας. Αλλά εδώ αποδείχθηκε ότι για το σύστημα

²⁰Σημ. Έλλην. Μεταφ. Όπως γράφει και ο Einstein λίγο πιο κάτω

$$\left[\begin{array}{c} m\sqrt{-g} \quad g_{\mu\alpha} \frac{dx_\alpha}{ds} \\ \sqrt{-g} = 1 \\ \text{μικρές ταχύτητες} \iff ds = \sqrt{g_{44}}dx_4 = \sqrt{B}dx_4 \end{array} \right] \iff m \frac{A}{\sqrt{B}} \frac{dx_1}{dx_4}, m \frac{A}{\sqrt{B}} \frac{dx_2}{dx_4}, m \frac{A}{\sqrt{B}} \frac{dx_3}{dx_4}$$

²¹Σημ. Έλλην. Μεταφ. Καθώς $1 = \sqrt{A^3 B}$ για να έχει νόημα αυτή η σχέση αν το $A \rightarrow 0$ θα πρέπει $B \rightarrow \infty$

²²Υπογράμμιση του έλληνα μεταφραστή

²³Σημ. Έλλην. Μεταφ. Κλειστό αλλά άπειρο Σύμπαν

²³Σημ. Αμερικάνου Μεταφ. Ο Jakob Grommer (1879-1933) ήταν ένας περιστασιακός συνεργάτης του Einstein μέχρι το 1928 (δες Pais 1982, pp. 487-488)

των σταθερών αστεριών δεν μπορούν να τεθούν συνοριακές συνθήκες αυτού του είδους, όπως ορθώς τόνισε πρόσφατα και ο αστρονόμος de Sitter.²⁴

Ο ανταλλοιώτος ταχυστής ενέργειας $T^{\mu\nu}$ της ύλης δίνεται από

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}$$

όπου ρ η πυκνότητα της ύλης μετρημένη σε φυσικές μονάδες. Με μια κατάλληλη επιλογή του συστήματος των συντεταγμένων, οι αστρικές ταχύτητες είναι πολύ μικρές σε σύγκριση με εκείνη του φωτός. Επομένως, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το ds με $\sqrt{g_{44}}dx_4$ ²⁵. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι συνιστώσες του $T^{\mu\nu}$ θα πρέπει να είναι πολύ μικρές σε σύγκριση με την τελευταία συνιστώσα του T^{44} . Αλλά ήταν τελείως αδύνατο να συμβιβάσουμε αυτό το αποτέλεσμα με τις επιλεγμένες οριακές συνθήκες. Εκ των υστέρων το ασυμβίβαστο αυτό δεν φαίνεται εκπληκτικό. Το γεγονός των μικρών ταχυτήτων των αστεριών μας επιτρέπει το συμπέρασμα ότι όπου υπάρχουν σταθερά αστερία, το βαρυτικό δυναμικό (στην περίπτωσή μας το $\sqrt{B}$) δεν μπορεί ποτέ να είναι πολύ μεγαλύτερο από την τιμή που έχει εδώ στη γη. Αυτό προκύπτει από στατιστικούς υπολογισμούς, όπως ακριβώς και στην περίπτωση της θεωρίας του Newton. Τελικά, οι υπολογισμοί μας με έχουν πείσει ότι τέτοιες εκφυλισμένες οριακές συνθήκες για το $g_{\mu\nu}$ στο χωρικό άπειρο δεν μπορούν να υπάρξουν.

Μετά την αποτυχία αυτής της απόπειρας, δυο δυνατότητες εμφανίζονται για τη συνέχεια.

(α) Μπορούμε να απαιτήσουμε, όπως και στο πρόβλημα των πλανητών, ότι με την κατάλληλη επιλογή

²⁴Σημ. Αμερικάνου Μεταφ. Δες De Sitter 1916, p. 503 (p. 531 στην αγγλική μετάφραση), υποσημείωση 2, στην οποία ο De Sitter τις πιο πάνω οριακές συνθήκες. Όπως ο De Sitter σημειώνει η υποσημείωση προστέθηκε στην εργασία στις 29 Σεπτεμβρίου του 1916 μετά από μια συζήτηση με τον Einstein .

²⁵Σημ. Έλλην. Μεταφ. Έχουμε ότι:

$$\left[\begin{array}{l} ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \xrightarrow{\varepsilon=1} ds = d\tau = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \\ g_{\mu\nu} = 0, \mu \neq \nu \\ g_{11} \ll g_{44}, g_{22} \ll g_{44}, g_{33} \ll g_{44}, \end{array} \right] \Longleftrightarrow ds = d\tau = \sqrt{g_{44}} dx^4$$

του συστήματος αναφοράς το $g_{\mu\nu}$ στο χωρικό άπειρο θα πρέπει να προσεγγίζει τις τιμές²⁶

$$\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

(β) Μπορούμε να αποφύγουμε εντελώς να καθορίσουμε γενικές οριακές συνθήκες για το χωρικό άπειρο. Όμως αλλά στο χωρικό όριο του τομέα που εξετάζουμε θα πρέπει να δίνουμε το $g_{\mu\nu}$ χωριστά για κάθε μεμονωμένη περίπτωση, όπως μέχρι τώρα είχαμε συνηθίσει να δίνουμε ξεχωριστά τις αρχικές συνθήκες για το χρόνο.

Η πιθανότητα (β) δεν αφήνει ελπίδα για επίλυση του προβλήματος, και μας οδηγεί στο να εγκαταλείψουμε την προσπάθεια μας. Αυτή είναι μια αδιαμφισβήτητη θέση, η οποία υιοθετείται σήμερα από τον de Sitter.^{26,27} Αλλά προσωπικά θα πρέπει να ομολογήσω ότι μια τέτοια πλήρη παραίτηση σε αυτό το θεμελιώδες ζήτημα είναι για μένα ένα δύσκολο πράγμα. Δεν θα έπρεπε να αποφασίσω να εγκαταλείψω κάθε προσπάθεια μέχρις ότου αποδειχθεί μάταιη η κάθε προσπάθεια να φτάσει κανείς σε ένα ικανοποιητικό αποτέλεσμα.²⁸

Η πιθανότητα (α) δεν είναι ικανοποιητική από πολλές απόψεις.

Πρώτον, αυτές οι οριακές αυτές συνθήκες προϋποθέτουν μια ορισμένη επιλογή του συστήματος αναφοράς, μια επιλογή η οποία είναι ξεκάθαρα αντίθετη με το πνεύμα της αρχής της σχετικότητας. Δεύτερον, εάν υιοθετήσουμε αυτή την άποψη, τότε αδυνατούμε να τηρήσουμε την απαίτηση της σχετικότητας της αδράνειας. Γιατί η αδράνεια ενός υλικού σημείου μάζας m (σε φυσικές μονάδες) εξαρτάται από το $g_{\mu\nu}$, αλλά αυτές διαφέρουν ελάχιστα από τις υποτιθέμενες τιμές τους, όπως αυτές δόθηκαν παραπάνω, για το χωρικό άπειρο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η αδράνεια πράγματι να επηρεάζεται αλλά

²⁶Σημ. Έλλην. Μεταφ. Που είναι η μετρική της ειδικής σχετικότητας για τον επίπεδο χώρο

²⁶Σημ. Einstein de Sitter, Akad. van Wetensch. te Amsterdam, 8 Nov., 1916.

²⁷Σημ. Αμερικάνου Μεταφ. Η εργασία αυτή του de Sitter υποβλήθηκε στη συνάντηση της Ακαδημίας Επιστημών του Άμστερνταμ της 30ής Σεπτεμβρίου 1916. Το εργασία αυτή ασκούσε κριτική στην απόρριψη του απόλυτου χώρου από τον Einstein και στην ιδέα της αιτίας της αδράνειας στις απομακρυσμένες μάζες, όπως παρουσιάζεται στο Einstein 1916e (Έγγραφο 30), αποτέλεσε την αρχή μιας διαμάχης μεταξύ του de Sitter και του Einstein σχετικά με τη σχετικότητα της περιστροφής και τη φύση της αδράνειας. Η συζήτηση συνεχίστηκε σε δημοσιευμένα άρθρα καθώς και σε αλληλογραφία (δες τόμος 8 την αλληλογραφία Einstein-de Sitter των ετών 1916-1918. Για την ιστορία δες North 1965, chap. 5, Kerszberg 1987, 1989a, 1989b, and Eisenstaedt 1993.)

²⁸Σημ. Αμερικάνου Μεταφ. de Sitter, Akad. van Wetensch. te Amsterdam, 8 Nov., 1916. Ο Einstein αναφέρεται στο γεγονός ότι στην ακριβή λύση των εξισώσεων πεδίου του Schwarzschild και του Droste, μια μόνο μάζα δημιουργεί ένα βαρυτικό πεδίο σε όλο το χώρο (δες Schwarzschild 1916a και Droste 1916). Δείτε επίσης τη συζήτηση του Einstein για αυτό το σημείο στο γράμμα του Einstein προς τον Karl Schwarzschild, 9 Ιανουαρίου 1916

όχι να καθορίζεται από την ύλη (που υπάρχει στον πεπερασμένο χώρο). Εάν υπήρχε μόνο ένα υλικό σημείο με μάζα, σύμφωνα με αυτή την άποψη, θα είχε αδράνεια, και στην πραγματικότητα μια αδράνεια σχεδόν τόσο μεγάλη όσο και όταν θα περιβάλλοταν από τις άλλες μάζες του πραγματικού σύμπαντος. Τέλος, αυτές οι στατιστικές αντιρρήσεις πρέπει να προβληθούν ενάντια σε αυτήν την άποψη, οι οποίες αναφέρθηκαν σε σχέση με τη θεωρία του Newton.

Από αυτά που αναφέρθηκαν μέχρι αυτό το σημείο, φαίνεται ότι δεν κατάφερα να διατυπώσω ικανοποιητικές συνοριακές συνθήκες για το χωρικό άπειρο. Παρ' όλα αυτά όμως, εξακολουθεί να υπάρχει μια πιθανή διέξοδος, χωρίς να χρειαστεί να οδηγηθώ στην παραίτηση, όπως προτάθηκε στο (β). Αν λοιπόν ήταν δυνατόν να θεωρήσουμε το σύμπαν ως ένα συνεχές που είναι πεπερασμένο (δηλαδή κλειστό) σε σχέση με τις χωρικές διαστάσεις του, δεν θα χρειαζόταν καθόλου να διατυπώσουμε τέτοιες οριακές συνθήκες. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι τόσο η γενική Αρχή της Σχετικότητας όσο και το γεγονός των μικρών αστρικών ταχυτήτων είναι συμβατά με την υπόθεση ενός χωρικά πεπερασμένου σύμπαντος. Όμως για να πετύχουμε αυτή την ιδέα, είναι αναγκαία μια γενικευμένη τροποποίηση των εξισώσεων πεδίου της βαρύτητας.

3 Το χωρικά Πεπερασμένο Σύμπαν με μια Ομογενή Κατανομή Μάζας

Σύμφωνα με τη γενική θεωρία της σχετικότητας, ο μετρικός χαρακτήρας (καμπυλότητα) του τετραδιάστατου χωροχρονικού συνεχούς ορίζεται σε κάθε σημείο από την ύλη που βρίσκεται σε αυτό το σημείο και από την κατάσταση της. Επομένως λόγω της έλλειψης ομοιομορφίας της κατανομής της ύλης, η μετρική δομή αυτού του συνεχούς πρέπει αναγκαστικά να είναι εξαιρετικά περίπλοκη. Αν όμως ενδιαφερόμαστε για τη δομή του Σύμπαντος μόνο σε μεγάλη κλίμακα, τότε μπορούμε να αποδεχθούμε ως ικανοποιητική προσέγγιση μια ομοιόμορφη κατανομή ύλης απλωμένης σε τεράστιους χώρους, μια τέτοια κατανομή ώστε η πυκνότητα της να είναι μια πολύ αργά μεταβαλλόμενη συνάρτηση. Έτσι η διαδικασία που περιγράφουμε θα προσομοιάζει κάπως τις μεθόδους των γαιογράφων οι οποίοι χρησιμοποιούν ένα ελλειψοειδές για να προσεγγίσουν το σχήμα της γήινης επιφάνειας, η οποία σε μια μικρή κλίμακα είναι εξαιρετικά πολύπλοκη.

Το πιο σημαντικό γεγονός που αντλούμε ως προς τη διανομή της ύλης από τα πειραματικά δεδομένα είναι ότι οι σχετικές ταχύτητες των αστεριών είναι πολύ μικρές σε σύγκριση με την ταχύτητα του φωτός. Θεωρώ λοιπόν ότι προς το παρόν μπορούμε να στηρίζουμε τη συλλογιστική μας στην ακόλουθη προσεγγιστική παραδοχή. Υπάρχει ένα σύστημα αναφοράς σε σχέση με το οποίο η ύλη μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται μόνιμα σε ηρεμία. Σε σχέση με αυτό το σύστημα, λοιπόν, ο ανταλλοίωτος

τανυστής ενέργειας $T_{\mu\nu}$ της ύλης είναι, λόγω τηω (5), την απλή μορφή:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \quad (6)$$

Το βαθμωτό μέγεθος ρ είναι η (μέση) πυκνότητα κατανομής η οποία μπορεί να είναι a priori συνάρτηση των χωρικών συντεταγμένων. Αλλά εάν υποθέσουμε ότι το σύμπαν είναι χωρικά πεπερασμένο, τότε οδηγούμαστε στην υπόθεση ότι το ρ θα πρέπει να είναι ανεξάρτητο από την θέση. Σε αυτήν την υπόθεση βασίζουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις.

Όσον αφορά το πεδίο βαρύτητας, από την εξίσωση κίνησης του υλικού σημείου προκύπτει ¹⁰

$$\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} + \{\alpha\beta, \nu\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 0$$

ότι ένα υλικό σημείο σε ένα στατικό βαρυτικό πεδίο μπορεί να παραμείνει σε κατάσταση ηρεμίας μόνο

¹⁰Σημ. Έλλην. Μεταφ. Με τον συμβολισμό $\{\alpha\beta, \nu\}$ ο Einstein συμβολίζει το $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(g_{\lambda\nu,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\lambda})$. Η εξίσωση αυτή κίνησης καθώς και αυτός ο συμβολισμός παρουσιάζονται στην [1], στις εξισώσεις (21,22,23).Εκεί δίνεται ότι:

$$\left[\begin{array}{l} \{\alpha\beta, \nu\} = g^{\nu\sigma}[\alpha\beta, \sigma] \\ [\alpha\beta, \sigma] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}\right) \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\nu = \frac{1}{2}g^{\nu\lambda}(g_{\lambda\alpha,\beta} + g_{\lambda\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\lambda}) \\ g_{\lambda\alpha,\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x_\beta} \end{array} \right] \iff \{\alpha\beta, \nu\} = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}\left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}\right)$$

όταν η g_{44} είναι ανεξάρτητη από την θέση¹⁰. Εφόσον, επιπλέον, προϋποθέτουμε την ανεξαρτησία της χρονικής συντεταγμένης x_4 για όλες τις τιμές, μπορούμε να απαιτήσουμε για την απαιτούμενη λύση για όλες τις x_ν ,

$$g_{44} = 1 \quad (7)$$

Περαιτέρω, όπως πάντα με στατικά προβλήματα, θα πρέπει να ορίσουμε

$$g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0 \quad (8)$$

Απομένει τώρα να προσδιοριστούν εκείνα τα συστατικά του βαρυτικού δυναμικού που καθορίζουν τις καθαρώς γεωμετρικές σχέσεις του συνεχούς μας $(g_{11}, g_{12}, \dots, g_{33})$. Από την παραδοχή μας ως προς την ομοιομορφία της κατανομής των μαζών που παράγουν το πεδίο, προκύπτει ότι η καμπυλότητα του απαιτούμενου χώρου πρέπει να είναι σταθερή. Με αυτή την κατανομή της μάζας, επομένως, το απαιτούμενο πεπερασμένο συνεχές των x_1, x_2, x_3 , με σταθερή x_4 , θα είναι ένας σφαιρικός χώρος.

Μπορούμε να καταλήξουμε σε έναν τέτοιο χώρο, για παράδειγμα, με τον ακόλουθο τρόπο. Ξεκινάμε από έναν Ευκλείδειο χώρο τεσσάρων διαστάσεων, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, με ένα γραμμικό στοιχείο $d\sigma$, όπου,

$$d\sigma^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2 \quad (9)$$

Σε αυτό το χώρο θεωρούμε την υπερεπιφάνεια:

$$R^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 \quad (10)$$

όπου το R είναι μια σταθερά. Τα σημεία που ανήκουν σε αυτή την υπερεπιφάνεια σχηματίζουν ένα τρισδιάστατο συνεχές, ένα σφαιρικό χώρο καμπυλότητας R .

Ο τετραδιάστατος Ευκλείδειος χώρος με τον οποίο ξεκινήσαμε, χρησιμεύει μόνο για έναν βολικό ορισμό της υπερ-επιφάνειας μας. Μας ενδιαφέρουν μόνο εκείνα τα σημεία της υπερ-επιφάνειας που έχουν μετρικές ιδιότητες οι οποίες συμφωνούν με αυτές ενός του φυσικού χώρου με ομοιόμορφη κατανομή της ύλης. Για την περιγραφή αυτού του τρισδιάστατου συνεχούς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις συντεταγμένες ξ_1, ξ_2, ξ_3 (την προβολή του στο υπερ-επίπεδο $\xi_4 = 0$) καθώς, λόγω της (10), το ξ_4 μπορεί

¹⁰Σημ. Έλλην. Μεταφ. Η εξίσωση κίνησης έχει παράμετρο τον ιδιόχρονο τ . Συνεπώς γίνεται

$$\left[\begin{array}{l} \frac{d^2 x_\nu}{d\tau^2} + \{\alpha\beta, \nu\} \frac{dx_\alpha}{d\tau} \frac{dx_\beta}{d\tau} = 0 \\ i = 1, 2, 3, \text{ ηρεμία} \iff \frac{d^2 x_i}{d\tau^2} = 0 \\ \frac{dx_i}{d\tau} = 0, i = 1, 2, 3, \frac{dx_4}{d\tau} \neq 0 \\ \text{στατικό πεδίο} \iff \frac{dg_{\mu\nu}}{dx^4} = 0 \end{array} \right] \iff \frac{dg_{44}}{dx^4} = 0 \iff g_{44} \text{ ανεξάρτητο } x_\nu$$

να εκφραστεί ως συνάρτηση των ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Απαλοίφοντας το ξ_4 από (9), παίρνουμε για το γραμμικό στοιχείο του σφαιρικού χώρου την έκφραση:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma^2 &= \gamma_{\mu\nu} d\xi_\mu d\xi_\nu \\ \gamma_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu} + \frac{\xi_\mu \xi_\nu}{R^2 - \rho^2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

όπου $\delta_{\mu\nu} = 1$ αν $\mu = \nu$, $\delta_{\mu\nu} = 0$ αν $\mu \neq \nu$ και $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$. Οι συντεταγμένες που επιλέχθηκαν είναι κατάλληλες όταν θέλουμε να μελετήσουμε το περιβάλλον γύρω από ένα από τα δύο σημεία με $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$.

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε και το γραμμικό στοιχείο του απαιτούμενου τετραδιάστατου χωροχρονικού σύμπαντος. Για το δυναμικό $g_{\mu\nu}$, όταν και οι δύο δείκτες είναι διαφορετικοί από το 4, θα πρέπει να θέσουμε:

$$g_{\mu\nu} = -\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{R^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}\right) \quad (12)$$

όπου η εξίσωση αυτή σε συνδιασμό με τις (7) και (8) καθορίζει απόλυτα τη συμπεριφορά των ράβδων-μετρητών, ρολογιών-μετρητών και των φωτεινών ακτίνων.

4 Περί ενός Πρόσθετου Όρου στις Εξισώσεις Πεδίου της Βαρύτητας

Οι προτεινόμενες από εμένα εξισώσεις πεδίου της βαρύτητας για ένα οποιοδήποτε επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων είναι οι εξής ¹³:

$$\left. \begin{aligned} G_{\mu\nu} &= -\kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \\ G_{\mu\nu} &= -\frac{\partial}{\partial x_4}\{\mu\nu, \alpha\} + \{\mu\alpha, \beta\}\{\nu\beta, \alpha\} + \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \{\mu\nu, \alpha\}\frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (13) δεν σημαίνει ότι αυτόματα ικανοποιείται όταν εισάγουμε για το $g_{\mu\nu}$ τις τιμές που δίδονται στις παραγράφους (7), (8) και (12), και για τον (ανταλλοιώτο) ταυστή της ενέργειας και ύλης τις τιμές από την (6). Στην επόμενη παράγραφο παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο μπορεί εύκολα να γίνει αυτός ο υπολογισμός. Επομένως, εάν ήταν βέβαιο ότι οι εξισώσεις πεδίου (13) που μέχρι τώρα είχα χρησιμοποιήσει ήταν οι μόνες που ήταν συμβατές με την Αρχή της Γενικής

¹³Σημ. Αμερικάνου Μεταφ. Δες Einstein 1916g (Doc. 32), eq. (1).
Σημ. Έλλην. Μεταφ. Στην εργασία του 1916 ο Einstein έχει ονομάσει δύο εξισώσεις με τον ίδιο αριθμό (1). Οι εξισώσεις πεδίου είναι η δεύτερη εξίσωση (η πρώτη της δεύτερης σελίδας).

Σχετικότητας, θα έπρεπε πιθανότατα να συμπεράνουμε ότι η θεωρία της σχετικότητας δεν μπορεί να υποστηρίξει την υπόθεση ενός χωρικά πεπερασμένου σύμπαντος.

Όμως το σύστημα των εξισώσεων (14)¹⁴ επιτρέπει μια εύκολα προταθείσα επέκταση που είναι συμβατή με την Αρχή της Σχετικότητας και είναι απόλυτα ανάλογη με την επέκταση της εξίσωσης Poisson όπως αυτή παρουσιάστηκε στην εξίσωση (2). Σύμφωνα με αυτή στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης (13) μπορούμε να προσθέσουμε το γινόμενο του θεμελιώδη ταυστή $g_{\mu\nu}$, πολλαπλασιαζόμενου με μια παγκόσμια σταθερά, $-\lambda$, η οποία προς το παρόν παραμένει άγνωστη, χωρίς να καταστρέφουμε τη γενική συναλλοίωτη μορφή των εξισώσεων. Στη θέση των εξισώσεων (13) γράφουμε τώρα

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \quad (13\alpha)$$

Αυτή η εξίσωση πεδίου, με το λ επαρκώς μικρό, είναι σε κάθε περίπτωση συμβατή και με τα πειραματικά δεδομένα που έχουμε από την παρατήρηση του ηλιακού συστήματος. Επίσης η εξίσωση αυτή ικανοποιεί τους νόμους της διατήρησης της ορμής και της ενέργειας, επειδή καταλήγουμε στη (13α) αντί για (13) εισάγοντας στην αρχή του Hamilton, αντί του βαθμωτού του ταυστή του Riemann, το ίδιο βαθμωτό μέγεθος ευξημάνο κατά μια παγκόσμια σταθερά. Η Αρχή του Hamilton φυσικά εξασφαλίζει την ισχύ των νόμων διατήρησης. Στην §5 θα φανεί ότι η εξίσωση πεδίου (13α) είναι συμβατή με τις υποθέσεις μας για την ενέργεια και την ύλη.

5 Υπολογισμοί και Αποτελέσματα

Από τη στιγμή που όλα τα σημεία στο συνεχές μας είναι ισοδύναμα είναι αρκετό να πραγματοποιήσουμε τον υπολογισμό μας για ένα σημείο, και συγκεκριμένα για το ένα από τα δυο σημεία με συντεταγμένες:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

Τότε για τα $g_{\mu\nu}$ στην (13α) θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις τιμές:

$$-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$0 \quad -1 \quad 0 \quad 0$$

$$0 \quad 0 \quad -1 \quad 0$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

¹⁴Σημ. Αμερικάνου Μεταφ. Στη θέση του (14) θα έπρεπε να είναι (13)

όπου εμφανίζονται να παραγωγίζονται μια φορά ή και καθόλου. Και έτσι τελικά καταλήγουμε στην:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_1} \{\mu\nu, 1\} + \frac{\partial}{\partial x_2} \{\mu\nu, 2\} + \frac{\partial}{\partial x_3} \{\mu\nu, 3\} + \{\mu\alpha, \beta\} \{\nu\beta, \alpha\} + \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$$

Από αυτή τελικά καταλήγουμε και με τη χρήση των (7), (8) και (13) ότι όλες οι εξισώσεις (13α) ικανοποιούνται μέσα από τις εξής δύο σχέσεις:

$$-\frac{2}{R^2} + \lambda = -\frac{\kappa\rho}{2} \quad , \quad -\lambda = -\frac{\kappa\rho}{2}$$

ή

$$\lambda = \frac{\kappa\rho}{2} = \frac{1}{R^2} \quad (14)$$

Συνεπώς η νέα παγκόσμια σταθερά που εισάγαμε λ ορίζει τόσο την μέση πυκνότητα κατανομής ρ που μπορεί να βρίσκεται σε ισορροπία όσο και την ακτίνα R και τον όγκο $2\pi^3 R^3$ του σφαιρικού χώρου. Η συνολική μάζα M του σύμπαντος, σύμφωνα με την άποψή μας, είναι πεπερασμένη και είναι στην πραγματικότητα ¹⁵

$$M = \rho 2\pi^2 R^3 = 4\pi^2 \frac{R}{\kappa} = \pi^2 \sqrt{\frac{32}{\kappa^3 \rho}} \quad (15)$$

Έτσι, η θεωρητική άποψη του πραγματικού σύμπαντος, αν όντως είναι σε αντιστοιχία με τη συλλογιστική μας, είναι η ακόλουθη. Η καμπυλότητα του χώρου είναι μεταβλητή σε χρόνο και τόπο, ανάλογα με την κατανομή της ύλης, αλλά μπορούμε να την προσεγγίσουμε χοντρικά θεωρώντας το Σύμπαν ένα σφαιρικό χώρο. Εν πάση περιπτώσει, αυτή η άποψη είναι λογικά συνεπής και από τη σκοπιά της γενικής θεωρίας της σχετικότητας είναι απόλυτα αποδεκτή, το αν από τη σκοπιά της παρούσας αστρονομικής γνώσης είναι αποδεκτή είναι ένα θέμα το οποίο δεν θα συζητηθεί εδώ. ¹⁶ Προκειμένου να καταλήξουμε σε αυτή τη συνεπή άποψη, έπρεπε να εισαγάγουμε μια επέκταση των εξισώσεων πεδίου της βαρύτητας που δεν δικαιολογείται από την πραγματική μας γνώση της βαρύτητας. Πρέπει να υπογραμμιστεί, ωστόσο, ότι θετική καμπυλότητα του χώρου μπορεί να εξαχθεί από τα αποτελέσματά μας, ακόμα και αν χωρίς την εισαγωγή αυτού του συμπληρωματικού όρου. Ο όρος αυτός είναι απαραίτητος μόνο για να καταστεί δυνατή η σχεδόν στατική κατανομή της ύλης, όπως απαιτείται από τις μικρές ταχύτητες των αστεριών.

¹⁵Σημ. Αμερικάνου Μεταφ. Ο όρος π^2 θα πρέπει να είναι μπροστά από την τετραγωνική ρίζα.

¹⁶Σημ. Αμερικάνου Μεταφ. Από τα αστρονομικά δεδομένα ο Einstein κατέληξε σε μια τιμή $R \times 10^7$ ετών φωτός, ενώ το μέγεθος του ορατού σύμπαντος εκτιμήθηκε σε 10^4 έτη φωτός (βλ. Π.χ. Einstein προς τον Michele Besso, μετά τις 9 Μαρτίου 1917, και ο Einstein προς τον Paul Ehrenfest, 14 Φεβρουαρίου 1917, για τις παρατηρήσεις του). Λίγο μετά τη δημοσίευση αυτού του εγγράφου, τόσο ο Erwin Freundlich όσο και ο Felix Klein επεσήμαναν στον Einstein ότι θα μπορούσε να είχε επιλεγεί μια ελλειπτική γεωμετρία αντί της σφαιρικής γεωμετρίας που εξετάζεται εδώ (βλέπε Einstein προς τον Felix Klein στις 26 Μαρτίου 1917, στον οποίο ο Einstein αναγνωρίζει τα σχόλια και τους ισχυρισμούς ότι και οι δύο γεωμετρίες δίνουν την ίδια σχέση μεταξύ της ακτίνας και της μέσης πυκνότητας).

Αναφορές

- [1] Einstein,A. 1916a. "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie".Annal. Physik 49:241-244. Or "The foundation of the general theory of relativity", <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol6-trans/30>
- [2] Einstein,A. 1918a. "Prinzipelles zur allgemeinen Relativitätstheorie".Annal. Physik 55:241-244. Or "On the foundations of the general theory of relativity", <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol7-trans/49>
- [3] A. Einstein,"Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity" , Sitzungbericht. 47 (1915) p. 833
- [4] A. Einstein,"Approximate Integration of the Field Equation of Gravitation" , Sitzungbericht. (1916) p. 688
- [5] A. Einstein,"About gravitational waves" , Sitzungberichte (1918) p. 154