

Το Πρόβλημα των Σωματιδίων στην Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

"The Particle Problem in the General Theory of Relativity"

PHYSICAL REVIEW, JULY 1, 1935, 48, 73

A. Einstein and N. Rosen

Μετάφραση από τα Αγγλικά :

Β. Καραβόλας, Ph. D.

email: vassilis@karavolas.gr

27 Φεβρουαρίου 2023

Οι συγγραφείς διερευνούν τη δυνατότητα μιας ατομικής θεωρίας της ύλης και του ηλεκτρισμού η οποία θα αποκλείει τις μοναδικότητες των πεδίων και θα χρησιμοποιεί ως μοναδική μεταβλητή το $g_{\mu\nu}$ της γενικής θεωρίας της σχετικότητας και το ϕ_μ της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας του Maxwell. Με την εξέταση ενός απλού παραδείγματος οι συγγραφείς οδηγούνται στο να τροποποιήσουν ελαφρώς τις βαρυτικές εξισώσεις οι οποίες στη συνέχεια δέχονται κανονικές λύσεις για τη σφαιρικά συμμετρική στατική περίπτωση. Αυτές οι λύσεις περιλαμβάνουν τη μαθηματική αναπαράσταση του φυσικού χώρου από ένα χώρο που αποτελείται από δύο ταυτόσημα φύλλα, ενώ ένα σωματίδιο αντιπροσωπεύεται από μια "γέφυρα" που συνδέει αυτά τα φύλλα. Με αυτό το μοντέλο κάποιος είναι σε θέση να καταλάβει γιατί δεν πρέπει να υπάρχουν ουδέτερα σωματίδια αρνητικής μάζας. Το συνδυασμένο σύστημα βαρυτικών και ηλεκτρομαγνητικών εξισώσεων αντιμετωπίζεται παρόμοια και οδηγεί σε παρόμοια ερμηνεία. Το πιο φυσικό στοιχειώδες φορτισμένο σωματίδιο βρέθηκε να έχει μηδενική μάζα. Τα συστήματα πολλών σωματιδίων αναμένεται να αντιστοιχούν σε κανονικές λύσεις των εξισώσεων πεδίου που αντιστοιχούν σε ένα χώρο από δύο πανομοιότυπα φύλλα που συνδέονται με πολλές γέφυρες. Σε αυτήν την περίπτωση, λόγω της απουσίας των μοναδικότητων, οι εξισώσεις πεδίου προσδιορίζουν τόσο το πεδίο όσο και την κίνηση των σωματιδίων. Το πρόβλημα πολλών σωματιδίων, το οποίο θα καθορίσει την αξία της θεωρίας, δεν έχει ακόμη λυθεί.

Παρά την μεγάλη της επιτυχία σε διάφορους τομείς, η παρούσα θεωρητική φυσική απέχει ακόμα πολύ από το να είναι σε θέση να παράσχει ένα ενιαίο θεμέλιο για την θεωρητική αντιμετώπιση όλων των φαινομένων. Έχουμε τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας που μελετά τα μακροσκοπικά φαινόμενα η οποία δυστυχώς δεν είναι ικανή για να εξηγήσει την ατομική δομή της ύλης και κατά συνέπεια και τα κβαντικά αποτελέσματα, και επίσης έχουμε μια κβαντική θεωρία, η οποία είναι ικανή να εξηγήσει ικανοποιητικά ένα μεγάλο αριθμό των ατομικών και κβαντικών φαινομένων, αλλά της οποίας η ίδια η φύση της είναι ασύμβατη με την αρχή της Σχετικότητας. Κάτω από αυτές τις συνθήκες δεν φαίνεται περιττό να θέσουμε το ερώτημα σχετικά με το πόσο η μέθοδος γενικής σχετικότητας μπορεί να δώσει τη δυνατότητα μελέτης των ατομικών φαινομένων. Μια τέτοια πιθανότητα θέλουμε να παρουσιάσουμε στη συγκεκριμένη εργασία, παρά την γεγονός ότι δεν είμαστε ακόμα σε θέση να αποφασίσουμε εάν αυτή η θεωρία μπορεί να μελετήσει τα κβαντικά φαινόμενα. Η δημοσίευση όμως αυτής της θεωρητικής μεθόδου δικαιολογείται, κατά τη γνώμη μας γιατί παρέχει μια σαφή διαδικασία, που χαρακτηρίζεται από ένα ελάχιστο αριθμό υποθέσεων, και της οποίας η μελέτη έχει μόνο να αντιμετωπίσει τις μαθηματικές δυσκολίες.

Το ζήτημα που μας απασχολεί μπορεί να τεθεί ως εξής: Μπορεί να αναπτυχθεί μια ατομική θεωρία της ύλης και του ηλεκτρισμού στην οποία ενώ αποκλείονται μοναδικότητες των πεδίων να μην είναι αναγκαίες άλλες μεταβλητές των πεδίων παρά μόνο εκείνες του βαρυτικού πεδίου $g_{\mu\nu}$ και εκείνες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου του Maxwell (διανυσματικά δυναμικά ϕ_μ);

Κάποιος θα ήταν διατεθειμένος να απαντήσει σε αυτή την ερώτηση αρνητικά εξαιτίας του γεγονότος ότι και οι λύσεις Schwarzschild για το σφαιρικό συμμετρικό στατικό βαρυτικό πεδίο αλλά και η επέκταση τους κατά Reissner's για την περίπτωση που στο χώρο υπάρχει και ένα ηλεκτροστατικό πεδίο παρουσι-

άζουν μια μοναδικότητα.^{1 2 3} Επιπλέον, η τελευταία από τις εξισώσεις του Maxwell που εκφράζει τον μηδενισμό της απόκλισης της (ανταλλοιώτης) πυκνότητας του ηλεκτρικού, φαίνεται να αποκλείει στη γενική περίπτωση την ύπαρξη πυκνοτήτων φορτίου, επομένως και ηλεκτρικών σωματιδίων.⁴

Για τους λόγους αυτούς συγγραφείς έχουν περιστασιακά προτείνει την πιθανότητα τα υλικά σωματίδια να μπορούν να θεωρηθούν ως μοναδικότητες του πεδίου. Αυτή την αντίληψη όμως εμείς δεν μπορούμε να τη δεχτούμε ούτε κατά διάνοια. Η αιτία είναι ότι μια μοναδικότητα εισάγει τόσο μεγάλη αυθαιρεσία στη θεωρία που ουσιαστικά ακυρώνει τους νόμους της.

Μια όμορφη επιβεβαίωση αυτού της άποψης παρουσιάστηκε σε μία επιστολή προς έναν από τους συγγραφείς του L. Silbersfein. Όπως και είναι γνωστό, οι Levi-Civita και Weyl παρουσίασαν μια γενική

¹Σημ. Έλλην. Μεταφ. Η μετρική του Schwarzschild για ένα σφαιρικό σώμα μάζας M είναι:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

²Σημ. Έλλην. Μεταφ. Η μετρική των Reissner-Nordström για ένα σφαιρικό στατικό φορτισμένο σώμα μάζας M με φορτίο Q που δεν περιστρέφεται είναι:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} + \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} + \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (f2a)$$

Γενικά σε έναν σφαιρικά συμμετρικό και πιθανώς χρονικά εξαρτώμενο χωρόχρονο το στοιχείο μήκους μπορεί να γραφεί:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = N^2(t, r) c^2 dt^2 - g_{rr}(t, r) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} g_{11} = -g_{rr} & g_{22} = -r^2 & g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta & g_{44} = N^2(t, r) \\ g^{11} = -\frac{1}{g_{rr}} & g^{22} = -\frac{1}{r^2} & g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} & g^{44} = \frac{1}{N^2(t, r)} \end{bmatrix}$$

όπου όλα τα $g_{\mu\nu} = 0$ για $\mu \neq \nu$ και $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$. Η ορίζουσα g είναι:

$$g = \begin{vmatrix} -g_{rr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N^2(t, r) \end{vmatrix} \iff g = -g_{rr} r^4 N^2(t, r) \sin^2 \theta$$

³Σημ. Έλλην. Μεταφ. Εδώ οι συγγραφείς χρησιμοποιούν την μετρική με τα πρόσημα $g = (+, -, -, -)$ δηλαδή τα χωροειδή διανύσματα έχουν αρνητικό ds^2 και τα χρονοειδή θετικό. Επίσης οι συγγραφείς τρέχουν τις συντεταγμένες ως 1, 2, 3, 4 με 4 την χρονική και όχι ως 0, 1, 2, 3 με 0 την χρονική.

⁴Σημ. Έλλην. Μεταφ. Ο νόμος του Gauss για τον ηλεκτρισμό στο κενό $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

μέθοδο για την εύρεση αξονικά συμμετρικών στατικών λύσεων των βαρυτικών εξισώσεων. Με αυτή τη μέθοδο μπορεί εύκολα κάποιος να καταλήξει σε μια λύση στην οποία, εκτός από τις δύο ξεχωριστές μοναδικότητες που βρίσκονται επάνω στον άξονα συμμετρίας, είναι παντού κανονικές και επιπλέον η γεωμετρία τους είναι ευκλείδεια στο άπειρο. Επομένως, αν κάποιος δεχτεί πως οι μοναδικότητες αντιπροσωπεύουν τα σωματίδια στην περίπτωση αυτή έχει δύο σωματίδια τα οποία δεν έχουν επιταχυνθεί από τη βαρυτική αλληλεπίδραση τους, ένα γεγονός το οποίο αποκλείεται φυσικά. Κάθε θεωρία πεδίου κατά τη γνώμη μας, πρέπει να στηριχθεί στη θεμελιώδη αρχή ότι τα πεδία δεν μπορούν να παρουσιάζουν μοναδικότητες.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι είναι δυνατό να το πετύχουμε αυτό με φυσικό τρόπο, και ότι η ερώτηση την οποία εμείς θέσαμε μπορεί να απαντηθεί καταφατικά..

1 Ένα Ειδικό Είδος Μοναδικότητας και η Αφαίρεση της

Το πρώτο βήμα στη γενική θεωρία της σχετικότητας βρισκόταν στη λεγόμενη “Αρχή της Ισοδυναμίας”: Εάν σε ένα χώρο εκτός βαρυτικών πεδίων, ένα σύστημα αναφοράς επιταχύνεται ομοιόμορφα, τότε αυτό το σύστημα αναφοράς μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται σε ηρεμία, υπό την προϋπόθεση ότι κάποιος ερμηνεύει την κατάσταση του χώρου σε σχέση με αυτό ως ένα ομογενές βαρυτικό πεδίο. Όπως είναι γνωστό, ένα τέτοιο πεδίο περιγράφεται ακριβώς από το μετρικό πεδίο⁵:

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + \alpha^2 x_1^2 dx_4^2 \quad (1)$$

Το $g_{\mu\nu}$ αυτού του πεδίου ικανοποιεί γενικά τις εξισώσεις:

$$R_{klm}^i = 0 \quad (2)$$

και επομένως και την εξίσωση⁶:

$$R_{kl} = R_{klm}^m = 0 \quad (3)$$

⁵ Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτό το μετρικό πεδίο δεν αντιπροσωπεύει ολόκληρο τον χώρο του Minkowski, αλλά μόνο ένα μέρος του. Έτσι, ο μετασχηματισμός που μετατρέπει

$$ds^2 = d\xi_1^2 - d\xi_2^2 - d\xi_3^2 + d\xi_4^2$$

στην (1) είναι:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 \cosh(\alpha x_4) & \xi_3 &= x_3 \\ \xi_2 &= x_2 & \xi_4 &= x_1 (\sinh \alpha x_4) \end{aligned}$$

Από αυτό βγαίνει ότι μόνο σημεία για τα οποία $\xi_1^2 \geq \xi_4^2$ αντιστοιχούν σε σημεία στα οποία η (1) είναι η μετρική.

⁶ Σημ. Έλληνα Μεταφ.: Ο ταυστής του Ricci R_{kl} καθορίζει τις εξισώσεις πεδίου για την βαρύτητα στον κενό χώρο. Οι εξισώσεις αυτές προέρχονται από την εξίσωση Laplace για το βαρυτικό δυναμικό. Οι εξισώσεις αυτές είναι $R_{kl} = -\Lambda g_{kl}$ όπου Λ η κοσμολογική σταθερά. Απουσία της κοσμολογικής σταθεράς οι εξισώσεις για τον κενό χώρο γίνονται: $R_{kl} = 0$.

Το $g_{\mu\nu}$ που αντιστοιχεί στο (1) είναι κανονικό για όλα τα πεπερασμένα σημεία του χωροχρόνου. Ωστόσο κάποιος δεν μπορεί να υποστηρίξει ότι η (3) ικανοποιείται από την (1) για όλες τις πεπερασμένες τιμές των x_1, x_2, x_3, x_4 . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η ορίζουσα g του $g_{\mu\nu}$ μηδενίζεται για $x_1 = 0$. Ο ανταλλοιώτος $g^{\mu\nu}$ συνεπώς απειρίζεται και οι τανυστές R_{klm}^i και R_{kl} παίρνουν την μορφή 0/0. Από την (3) βγαίνει ότι το υπερεπίπεδο $x_1 = 0$ αντιπροσωπεύει μια μοναδικότητα του πεδίου.⁷

Στη συνέχεια αναρωτιόμαστε αν ο νόμος του πεδίου της βαρύτητας (και αργότερα ο νόμος του πεδίου της βαρύτητας και του ηλεκτρικού πεδίου) μπορεί να τροποποιηθεί με έναν φυσικό τρόπο και χωρίς να υποστεί ουσιαστική αλλαγή έτσι ώστε η λύση (1) να ικανοποιεί τις εξισώσεις πεδίου για όλα τα πεπερασμένα σημεία, δηλαδή, ακόμα και για αυτά που ανήκουν στον $x_1 = 0$. Ο W. Mayer μας επέστησε την προσοχή μας στο γεγονός ότι μπορεί κανείς να μετατρέψει τους τανυστές R_{klm}^i και R_{kl} καθώς και τις δυο πρώτες παραγώγους τους σε ρητές συναρτήσεις του g_{mn} , πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλες δυνάμεις του g . Είναι εύκολο να δειχθεί ότι στην παράσταση $g^2 R_{kl}$ δεν υπάρχει πια παρονομαστής. Αν τώρα αντικαταστήσουμε την (3) με τις

$$R_{kl}^* = g^2 R_{kl} = 0 \quad (3a)$$

το σύστημα αυτό των εξισώσεων ικανοποιεί την (1) σε όλα τα πεπερασμένα σημεία.⁸ Αυτή η μέθοδος ουσιαστικά εισάγει στη θέση του $g^{\mu\nu}$ τους συντελεστές $[g_{\mu\nu}]$ του $g_{\mu\nu}$ στην g έτσι ώστε να αποφευχθεί η εμφάνιση των παρονομαστών. Κάποιος τελικά δουλεύει με τανυστικές πυκνότητες κατάλληλου βάρους αντί για τους τανυστές. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγονται μοναδικότητες του είδους που αναφέρθηκε προηγουμένως οι οποίες προέρχονται από τον απειρισμό του g .

Η λύση της 1 δεν έχει μια βαθύτερη φυσική σημασία καθώς εκκινεί μέχρι το χωρικό άπειρο. Όμως επιτρέπει σε κάποιον να καταλάβει σε ποιο βάθος η μελέτη των υπερεπιφανειών $g = 0$ οδηγεί σε μια θεωρητική αντιμετώπιση της ύλης, ανεξάρτητα από την αρχική θεωρία. Επομένως στο πλαίσιο της αρχικής θεωρίας κάποιος μελετά τις βαρυτικές εξισώσεις

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -T_{ik} \quad (4)$$

όπου T_{ik} ο τανυστής της πυκνότητας μάζας ή ενέργειας.⁹ Για να μελετήσουμε την 1 στο πλαίσιο αυτής της θεωρίας θα πρέπει να προσεγγίσουμε το στοιχείο μήκους με κάποια διαφορετική έκφραση η οποία θα αποφεύγει τις μοναδικότητες που εμφανίζονται για $g = 0$. Για να το πετύχουμε αυτό εισάγουμε μια μικρή σταθερά σ και παίρνουμε:

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + (\alpha^2 x_1^2 + \sigma) dx_4^2 \quad (1a)$$

⁷Σημ. Έλλην. Μεταφ.Μια μοναδικότητα καμπυλότητας είναι η περιοχή του χώρου όπου κάποια από τα αναλλοιώτα της καμπυλότητας τα οποία παράγονται από τον τανυστή του Riemann απειρίζονται.

⁸Σημ. Έλλην. Μεταφ.Για ένα γενικά σφαιρικό χωρόχρονο παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α η εφαρμογή της μεθόδου αυτής που απαλοίζει τους παρονομαστές.

⁹Σημ. Έλλην. Μεταφ.Το βαθμωτό μέγεθος του Ricci είναι:

$$R = R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} + g^{44} R_{44}$$

Όσο μικρότερο είναι το επιλεγμένο σ τόσο αυτό το βαρυτικό πεδίο πλησιάζει περισσότερο σε αυτό της 1. Αν από αυτό το βαρυτικό πεδίο υπολογίσει κάποιος τον (φανταστικό) τανυστή ενέργειας T_{ij} καταλήγει στην μη μηδενική συνιστώσα του ¹⁰

$$T_{22} = T_{33} = \frac{\alpha^2}{\frac{\sigma}{(1 + \frac{\alpha^2 x_1^2}{\sigma})^2}}$$

11

Παρατηρούμε τώρα ότι όσο μικρότερη τιμή παίρνει η παράμετρος σ τόσο περισσότερο ο τανυστής συγκεντρώνεται στην γειτονιά της υπερεπιφάνειας $x_1 = 0$. Από τη σκοπιά της αρχικής θεωρίας η λύση 1 περιέχει μια μοναδικότητα η οποία αντιστοιχεί σε μάζα ή ενέργεια η οποία είναι συγκεντρωμένη στην επιφάνεια $x_1 = 0$. Από την σκοπιά της τροποποιημένης θεωρίας η 1 είναι μια λύση της 3α ελεύθερη από μοναδικότητες η οποία περιγράφει την "μάζα που παράγει το πεδίο" χωρίς να χρειάζεται γι αυτό να εισάγουμε νέες πεδιακές ποσότητες.

Είναι ξεκάθαρο ότι όλες οι εξισώσεις του διαφορικού λογισμού μπορούν να γραφούν σε μορφή ελεύθερη από παρονομαστές, όπου οι τανυστές έχουν αντικατασταθεί από τανυστικές πυκνότητες κατάλληλου βάρους.

Πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση της λύσης. 1 ολόκληρο το πεδίο αποτελείται από δύο ίσα μισά, χωρίζονται από την επιφάνεια με συμμετρία $x_1 = 0$, έτσι ώστε για τα αντίστοιχα σημεία (x_1, x_2, x_3, x_4) και $(-x_1, x_2, x_3, x_4)$ τα g_{ik} να είναι ίσα. Σαν αποτέλεσμα βρίσκουμε ότι αν και επιτρέπουμε στην ορίζουσα g να παίρνει την τιμή 0 (για την $x_1 = 0$) δεν εμφανίζεται αλλαγή προσήμου στην g και στη γενική περίπτωση δεν εμφανίζεται αλλαγή προσήμου στον "αδρανειακό δείκτη" της τετραγωνικής μορφής 1. Αυτά τα χαρακτηριστικά είναι θεμελιώδους σημασίας για την φυσική αντιμετώπιση του προβλήματος και θα τα συναντήσουμε και στις λύσεις που θα μελετήσουμε αργότερα.

¹⁰Σημ. Έλλην. Μεταφ. Η σχέση αυτή έχει τυπογραφικό λάθος στη δημοσίευση καθώς εκεί δίνεται $T_{22} = T_{23}$ που δεν έχει νόημα λόγω της συμμετρίας του προβλήματος.

¹¹Σημ. Έλλην. Μεταφ. Για τη μετρική (1α) έχουμε ότι (αναλυτικός υπολογισμός)

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$$

$$g_{44} = (\alpha^2 x_1^2 + \sigma)$$

Τότε η ορίζουσα της μετρικής θα είναι:

$$g = -(\alpha^2 x_1^2 + \sigma)$$

και η ανταλλοίωτη μετρική θα είναι:

$$g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$$

$$g^{44} = \frac{1}{(\alpha^2 x_1^2 + \sigma)}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned}
 g_{44} &= \alpha^2 x_1^2 + \sigma \quad , \quad g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1 \\
 g_{11} &= g_{22} = g_{33} = -1 \quad , \quad g^{44} = \frac{1}{(\alpha^2 x_1^2 + \sigma)} \\
 g_{ij} &\stackrel{i \neq j}{=} 0 \\
 R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R &= -T_{ik} \\
 R &= R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\
 &= g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} + g^{44} R_{44} \\
 R_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu\beta}^{\beta} = \Gamma_{\mu\beta,\nu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu,\beta}^{\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \quad \mu\epsilon \\
 \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} &= \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (g_{\lambda\nu,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\lambda}) \quad \kappa\alpha\iota \\
 \Gamma_{\mu\beta,\nu}^{\beta} &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\mu\beta}^{\beta} \\
 \Gamma_{44}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} = \alpha^2 x_1 \\
 \Gamma_{14}^4 &= \frac{1}{2} g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} = \frac{\alpha^2 x_1}{\alpha^2 r^2 + \sigma} \\
 \Gamma_{41}^4 &= \frac{1}{2} g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} = \frac{\alpha^2 x_1}{\alpha^2 r^2 + \sigma} \\
 \text{όλα τα άλλα } \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} &\text{ είναι μηδενικά} \\
 \Gamma_{\mu\beta,2}^{\beta} &= \Gamma_{\mu\beta,3}^{\beta} = \Gamma_{\mu\beta,4}^{\beta} = 0 \\
 \Gamma_{44,1}^1 &= \frac{\partial}{\partial x^1} \Gamma_{44}^1 = a^2 \\
 \Gamma_{14,1}^1 &= \frac{\partial}{\partial x^1} \Gamma_{44}^1 = \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\alpha^2 x_1}{\alpha^2 r^2 + \sigma} = -\frac{\alpha^2 x_1}{(\alpha^2 r^2 + \sigma)^2} \\
 \Gamma_{41,1}^4 &= \frac{\partial}{\partial x^1} \Gamma_{44}^1 = \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\alpha^2 x_1}{\alpha^2 r^2 + \sigma} = -\frac{\alpha^2 x_1}{(\alpha^2 r^2 + \sigma)^2}
 \end{aligned} \right] \iff
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned}
 g_{44} &= \alpha^2 x_1^2 + \sigma \quad , \quad g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1 \\
 g_{11} &= g_{22} = g_{33} = -1 \quad , \quad g^{44} = \frac{1}{(\alpha^2 x_1^2 + \sigma)} \\
 g_{ij} &\stackrel{i \neq j}{=} 0 \\
 R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R &= -T_{ik} \\
 R &= R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\
 &= g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} + g^{44} R_{44} \\
 R_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu\beta}^{\beta} = \Gamma_{\mu\beta,\nu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu,\beta}^{\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \quad \mu\epsilon \\
 \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} &= \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (g_{\lambda\nu,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\lambda}) \quad \kappa\alpha\iota \\
 \Gamma_{\mu\beta,2}^{\beta} &= \Gamma_{\mu\beta,3}^{\beta} = \Gamma_{\mu\beta,4}^{\beta} = 0 \\
 \Gamma_{44,1}^1 &= \frac{\partial}{\partial x^1} \Gamma_{44}^1 = a^2 \\
 \Gamma_{14,1}^1 &= \frac{\partial}{\partial x^1} \Gamma_{44}^1 = \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\alpha^2 x_1}{\alpha^2 r^2 + \sigma} = -\frac{\alpha^2 x_1}{(\alpha^2 r^2 + \sigma)^2} \\
 \Gamma_{41,1}^4 &= \frac{\partial}{\partial x^1} \Gamma_{44}^1 = \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\alpha^2 x_1}{\alpha^2 r^2 + \sigma} = -\frac{\alpha^2 x_1}{(\alpha^2 r^2 + \sigma)^2} \\
 R_{11} &= \frac{\alpha^2 \sigma}{(\alpha^2 r^2 + \sigma)^2} \\
 R_{22} &= R_{33} = 0 \\
 R_{44} &= -\alpha^2 + \frac{\alpha^4 x_1^2}{(\alpha^2 r^2 + \sigma)} \\
 \text{όλα τα άλλα } R_{\mu\nu} &\text{ είναι μηδενικά} \\
 R &= \frac{-2\alpha^2 \sigma}{(\alpha^2 r^2 + \sigma)^2}
 \end{aligned} \right] \iff
 \end{aligned}$$

2 Η λύση του Schwarzschild

Όπως είναι γνωστό ο Schwarzschild βρήκε την σφαιρικά συμμετρική στατική λύση των εξισώσεων της βαρύτητας ¹²

$$ds^2 = -\frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + (1 - \frac{2m}{r}) dt^2 \quad (5)$$

($r < 2m$, θ από 0 έως π , ϕ από 0 έως 2π) και οι μεταβλητές εδώ έχουν την αντιστοιχία $x_1 \rightarrow r$, $x_2 \rightarrow \theta$, $x_3 \rightarrow \phi$ και $x_4 \rightarrow t$. Ο μηδενισμός της ορίζουσας της μετρικής $g_{\mu\nu}$ για $\theta = 0$ είναι μη σημαντικός καθώς η συγκεκριμένη αντίστοιχη χωρική διεύθυνση δεν είναι προτιμητέα. Από την άλλη μεριά η g_{11} για $r = 2m$ απειρίζεται και όντως σε αυτό το σημείο εμφανίζεται μια μοναδικότητα.

$$\left[\begin{array}{l} g_{44} = \alpha^2 x_1^2 + \sigma \quad , \quad g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1 \\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \quad , \quad g^{44} = \frac{1}{(\alpha^2 x_1^2 + \sigma)} \\ g_{ij} \stackrel{i \neq j}{=} 0 \\ R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -T_{ik} \\ R_{11} = \frac{\alpha^2 \sigma}{(\alpha^2 r^2 + \sigma)^2} \\ R_{22} = R_{33} = 0 \\ R_{44} = -\alpha^2 + \frac{\alpha^4 x_1^2}{(\alpha^2 r^2 + \sigma)} \\ \text{όλα τα άλλα } R_{\mu\nu} \text{ είναι μηδενικά} \\ R = \frac{-2\alpha^2 \sigma}{(\alpha^2 r^2 + \sigma)^2} \\ T_{11} = 0 \\ T_{22} = T_{33} = \frac{\alpha^2 \sigma}{(\alpha^2 r^2 + \sigma)^2} \\ T_{44} = 0 \\ T_{\mu\nu, \mu \neq \nu} = 0 \end{array} \right]$$

¹²Σημ. Έλλην. Μεταφ.: Εδώ οι συγγραφείς δουλεύουν στο σύστημα συντεταγμένων με $G = c = 1$

Αν κάποιος εισάγει στη θέση του r την νέα μεταβλητή

$$u^2 = r - 2m$$

τότε λαμβάνει για το στοιχείο μήκους ds^2 την σχέση:

$$ds^2 = -4(u^2 + 2m)du^2 - (u^2 + 2m)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \frac{u^2}{u^2 + 2m}dt^2 \quad (5\alpha)$$

Αυτές οι $g_{\mu\nu}$ είναι κανονικές συναρτήσεις για όλες τις τιμές των μεταβλητών. Όμως για $u = 0$ η g_{44} μηδενίζεται συνεπώς και η ορίζουσα g . Το γεγονός αυτό δεν εμποδίζει τις εξισώσεις πεδίου 3α οι οποίες δεν περιέχουν παρονομαστές από το να ικανοποιούνται για όλες τις τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών. Συνεπώς ασχολούμαστε με μια λύση η οποία είναι ελεύθερη από μοναδικότητες για όλα τα πεπερασμένα σημεία. Η υπερεπιφάνεια $u = 0$ (ή αν αναφερθούμε στις αρχικές συντεταγμένες $r = 2m$) παίζει σε αυτή τη μετρική τον ίδιο ρόλο τον οποίο έπαιζε η υπερεπιφάνεια $x_1 = 0$ στο προηγούμενο παράδειγμα.

Καθώς το u μεταβάλλεται από $-\infty$ έως ∞ , το r μεταβάλλεται από $+\infty$ έως $2m$ και στη συνέχεια και πάλι από $2m$ έως $+\infty$. Αν κανείς προσπαθήσει να ερμηνεύσει την κανονική λύση 5α στο χώρο των r, θ, ϕ, t καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα. Ο τετραδιάστατος χώρος περιγράφεται μαθηματικά από δύο συναφή μέρη ή "φύλλα", που αντιστοιχούν στα $u > 0$ και $u < 0$, τα οποία ενώνονται με ένα υπερεπίπεδο $r = 2m$ ή $u = 0$ όπου το g εξαφανίζεται.¹³ Ονομάζουμε μια τέτοια σύνδεση μεταξύ των δύο φύλλων ως "γέφυρα".

Παρατηρούμε τώρα ότι η συγκεκριμένη λύση, απαλλαγμένη από μοναδικότητες, είναι η μαθηματική αναπαράσταση του ένα στοιχειώδους σωματιδίου (νετρόνιο ή νετρίνο)¹⁴. Είναι χαρακτηριστικό της θεωρίας που παρουσιάζουμε η περιγραφή του χώρου με τη χρήση δύο τέτοιων φύλλων. Μια γέφυρα, χωρικά πεπερασμένη, που συνδέει δύο τέτοια φύλλα χαρακτηρίζει την ύπαρξη ενός ηλεκτρικά ουδέτερου στοιχειώδους σωματιδίου. Με αυτή την ιδέα δεν επιτυγχάνεται μόνο η μελέτη ενός στοιχειώδους σωματιδίου χρησιμοποιώντας μόνο τις εξισώσεις πεδίου, χωρίς την ανάγκη εισαγωγής νέων ποσοτήτων για την περιγραφή της πυκνότητας της ύλης. Με αυτή την ιδέα κάποιος είναι επίσης σε θέση να κατανοήσει τον ατομικό χαρακτήρα της ύλης καθώς και το γεγονός ότι δεν μπορεί να υπάρξει σωματίδιο αρνητικής μάζας. Το τελευταίο γίνεται σαφές από τους ακόλουθους λόγους. Αν είχαμε ξεκινήσει από μια λύση Schwarzschild με αρνητική m , δεν θα έπρεπε να είμαστε σε θέση να μετατρέψουμε τις λύσεις μας σε κανονικές συναρτήσεις με την εισαγωγή μιας νέας μεταβλητής u αντί r : δηλαδή δεν υπάρχει "γέφυρα" που να αντιστοιχεί σε ένα σωματίδιο αρνητικής μάζας. Εάν εξετάσουμε για άλλη μια φορά τη λύση (1) από την άποψη των πληροφοριών που βγάζουμε από τη λύση του Schwarzschild, βλέπουμε ότι και τα δύο αντίστοιχα μισά του χώρου για τα $x_1 > 0$ και $x_1 < 0$ μπορούν να ερμηνευτούν ως δύο φύλλα το που καθένα που αντιστοιχεί στον ίδιο φυσικό χώρο. Με αυτή την έννοια το παράδειγμα αντιπροσωπεύει ένα βαρυτικό πεδίο, ανεξάρτητο των x_2 και x_3 και το οποίο καταλήγει σε ένα επίπεδο καλυμμένο με μάζα το οποίο σχηματίζει ένα όριο στο χώρο. Σε αυτό το παράδειγμα, όπως και στην περίπτωση Schwarzschild,

¹³Εξαιτίας της συμμετρίας γύρω από την υπερεπιφάνεια $g = 0$ το πρόσημο του g δεν αλλάζει σε αυτή την υπερεπιφάνεια.

¹⁴Σημ. Έλλην. Μεταφ.: Την εποχή που γράφτηκε αυτή η εργασία το νετρόνιο θεωρείτο στοιχειώδες καθώς δεν είχε προταθεί η ιδέα των quarks

μια λύση ελεύθερη από μοναδικότητες σε όλα τα πεπερασμένα σημεία γίνεται δυνατή με την εισαγωγή των τροποποιημένων βαρυτικών εξισώσεων 3α.

Η κύρια αξία των εκτιμήσεων που παρουσιάζουμε εδώ συνίσταται στο ότι δείχνουν το δρόμο προς μια ικανοποιητική αντιμετώπιση της βαρυτικής μηχανικής. Μία από τις ατέλειες της αρχικής σχετικιστικής θεωρίας της βαρύτητας ήταν αυτή ως θεωρία πεδίου δεν ήταν πλήρης, καθώς εισήγαγε τον ανεξάρτητο ισχυρισμό ότι ο νόμος της κίνησης ενός σωματιδίου δίνεται από την γεωδαισιακή.¹⁵ Μια πλήρης θεωρία πεδίου αναγνωρίζει μόνο πεδία και όχι τις έννοιες του σωματιδίου και της κίνησης. Αυτές δεν πρέπει να υπάρχουν ανεξάρτητα από το πεδίο αλλά να αντιμετωπίζονται ως τμήμα του πεδίου. Χρησιμοποιώντας την περιγραφή ενός σωματιδίου απουσία μοναδικότητας κάποιος αποκτά τη δυνατότητα μιας λογικά πιο ικανοποιητικής αντιμετώπισης του συνδυασμένου προβλήματος καθώς τα προβλήματα του πεδίου και της κίνησης συμπίπτουν.

Εάν συνυπάρχουν πολλά σωματίδια, τότε η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε πρόβλημα στο οποίο χρειαζόμαστε λύση χωρίς μοναδικότητες των τροποποιημένων εξισώσεων 3α. Σε αυτή την περίπτωση η λύση μας περιγράφει ένα χώρο με δύο συναφή φύλλα συνδεδεμένα από διάφορες διακριτές "γέφυρες". Κάθε τέτοια λύση αποτελεί ταυτόχρονα λύση του προβλήματος του πεδίου αλλά και του προβλήματος της κίνησης.

Στην περίπτωση αυτή δεν θα είναι δυνατόν να περιγραφεί ολόκληρο το πεδίο με μία μόνο συντεταγμένη χωρίς την εισαγωγή μοναδικότητων. Η απλούστερη διαδικασία φαίνεται να είναι η επιλογή του συστήματος συντεταγμένων ως εξής:

1. Ένα σύστημα συντεταγμένων για να περιγράψει ένα από τα τα συμπαγή φύλλα. Σε σχέση με αυτό το σύστημα το πεδίο θα παρουσιάζει μοναδικότητα σε κάθε γέφυρα.
2. Ένα σύστημα συντεταγμένων για κάθε γέφυρα, τέτοιο ώστε να περιγράφει το πεδίο στη γέφυρα και στη γειτονιά της χωρίς μοναδικότητες.

Μεταξύ του συστήματος συντεταγμένων των φύλλων και εκείνες της κάθε γέφυρας θα πρέπει να υπάρχουν στο χώρο εκτός των υπερεπιφανειών $g = 0$, κανονικοί μετασχηματισμοί συντεταγμένων με μη μηδενικές ορίζουσες.

3 Σύνθετο Πεδίο. Ηλεκτρισμός

Η απλούστερη μέθοδος για να συμπεριλάβει κανείς τον Ηλεκτρισμό στο εννοιολογικό πλαίσιο της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας βασίζεται στην επόμενη σειρά σχέσεων. Αν εκτός από το καθαρό πεδίο βαρύτητας υπάρχουν και άλλα πεδία παρόντα, τότε οι εξισώσεις πεδίου της βαρύτητας είναι

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = -T_{ik} \quad (4)$$

¹⁵Για να είμαστε ακριβείς αυτή η ατέλεια εξαφανίστηκε στη θεωρία με την εισαγωγή του τανυστή της ενέργειας στις πεδιακές εξισώσεις. Ήταν όμως φανερό από την αρχή ότι αυτή ήταν μια επιφανειακή συμπλήρωση της θεωρίας καθώς στηριζόταν σε μια καθαρά φαινομενολογική ερμηνεία.

όπου T_{ik} είναι ο “ υλικός ” τανυστής ενέργειας, δηλαδή το μέρος της μαθηματικής περιγραφής της ενέργειας το οποίο δεν εξαρτάται αποκλειστικά από το $g_{\mu\nu}$. Στην περίπτωση της φαινομενολογικής μελέτης της ύλης - αν αυτή θεωρηθεί ότι είναι κάτι σαν σκόνη, δηλαδή δεν εμφανίζει πίεση- κάποιος μπορεί να πάρει:

$$T^{ik} = \rho \left(\frac{dx^i}{ds} \right) \left(\frac{dx^k}{ds} \right)$$

όπου ρ είναι η βαθμωτή πυκνότητα και $\frac{dx^i}{ds}$ οι συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η T_4^4 είναι μια θετική ποσότητα.

Στην γενική περίπτωση, οι πρόσθετες μεταβλητές πεδίου ικανοποιούν διαφορικές εξισώσεις που οδηγούν στον μηδενισμό της απόκλισης $T_{ik;m} g^{mk}$. Το γεγονός πως η απόκλιση του αριστερού μέλους της (4) μηδενίζεται ταυτοτικά οδηγεί στην ύπαρξη ανάμεσα σε όλες τις εξισώσεις πεδίου τεσσάρων ταυτοτήτων αναγκαίων για την συμβατότητα τους. Μέσα από αυτές σε ορισμένες περιπτώσεις καθορίζεται η δομή του T_{ik} , αλλά όχι το πρόσημο του. Φαίνεται φυσικό κάποιος να επιλέξει αυτό το πρόσημο με τέτοιο τρόπο ώστε το πρόσημο της συνιστώσας του T_4^4 (στο όριο της θεωρίας της Ειδικής Σχετικότητας) να είναι πάντα θετικό.

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο του Maxwell, όπως είναι γνωστό, περιγράφεται από το αντισυμμετρικό τανυστικό πεδίο $\phi_{\mu\nu} (= \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^\mu})$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις πεδίου:

$$\phi_{\mu\nu;\sigma} g^{\nu\sigma} = 0 \quad (6)$$

Αυτές οι εξισώσεις έχουν το πολύ γνωστό αποτέλεσμα του μηδενισμού της απόκλισης του τανυστή¹⁶.

¹⁶Σημ. Έλλην. Μεταφ.Ο τανυστής αυτός είναι:

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) & S_x & S_y & S_z \\ S_x & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ S_y & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ S_z & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

όπου $S = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ το διάνυσμα Poynting και $E^i = -\phi^{4i}$, $\epsilon^{ijk} B_k = -\phi^{ij}$ με $i, j, k = 1, 2, 3$.

$$\sigma_{ij} = \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \delta_{ij}$$

είναι ο τανυστής τάσης του Maxwell

$$T_{ik} = \frac{1}{4} g_{ik} \phi_{\alpha\beta} \phi^{\alpha\beta} - \phi_{i\alpha} \phi_k^\alpha \quad (7)$$

Το πρόσημο επιλέγεται έτσι ώστε το T_4^4 να είναι θετικό στην περίπτωση της ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Αν κάποιος εισάγει αυτό το T_{ik} στις βαρυτικές εξισώσεις (4) τότε αυτές μαζί με τις 6 και 7 σχηματίζουν μια θεωρία βαρύτητας και ηλεκτρομαγνητισμού.

Όμως συμβαίνει να είμαστε αναγκασμένοι να θέσουμε το παραπάνω αρνητικό πρόσημο στις εξισώσεις βαρύτητας ώστε να είναι δυνατόν να εξάγουμε στατικές σφαιρικά συμμετρικές λύσεις των εξισώσεων, ελεύθερες από μοναδικότητες, οι οποίες θα αντιπροσωπεύουν φορτισμένα σωματίδια. Πραγματοποιώντας αυτή την αλλαγή προσήμου κάποιος καταλήγει στην επιθυμητή λύση:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0 \quad \phi_4 = \frac{\epsilon}{r} \\ ds^2 = -\frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\epsilon^2}{2r^2}\right)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\epsilon^2}{2r^2}\right) dt^2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Εδώ το m είναι προφανώς μια βαρυτική μάζα ενώ το ϵ ένα ηλεκτρικό φορτίο¹⁸.

Αποδεικνύεται ότι και στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει δυσκολία σχηματισμού μιας λύσης χωρίς μοναδικότητες που να αντιστοιχεί στη λύση που μόλις δόθηκε¹⁹. Περιέργως, διαπιστώνουμε ότι η μάζα

¹⁷Σημ. Έλλην. Μεταφ. Στο κενό η απόκλιση του ταυιστή ενέργειας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι:

$$\left[\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{1}{\mu_0} \left[F^{\alpha\mu} F_\alpha^\nu - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right] \iff \partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{2\mu_0} \left[\partial_{\mu\nu} (F^{\alpha\mu} F_\alpha^\nu) - \frac{1}{4} \partial_\mu (\eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}) \right] = \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left[\partial_\mu (F^{\alpha\mu} F_\alpha^\nu) - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu (F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}) \right] \\ &= \partial_\mu \left(F^{\alpha\mu} F_\alpha^\nu \right) = F^{\alpha\mu} \left(\partial_\mu F_\alpha^\nu \right) + F_\alpha^\nu \left(\partial_\mu F^{\alpha\mu} \right) \\ &J^\alpha = 0 \iff F_\alpha^\nu \left(\partial_\mu F^{\alpha\mu} \right) = 0 \\ &F^{\alpha\mu} \left(\partial_\mu F_\alpha^\nu \right) = \frac{F^{\alpha\mu} (\partial_\mu F_\alpha^\nu) + F^{\mu\alpha} (\partial_\alpha F_\mu^\nu)}{2} \iff F^{\alpha\mu} \partial_\mu \left(F^{\alpha\mu} F_\alpha^\nu \right) = \frac{F^{\alpha\mu} (\partial_\mu F_\alpha^\nu - \partial_\alpha F_\mu^\nu)}{2} \\ &\left[(\partial_\mu F^{\alpha\beta}) F_{\alpha\beta} = \eta^{\gamma\alpha} \eta^{\delta\beta} \eta_{\theta\alpha} \eta_{\phi\beta} F^{\theta\phi} (\partial_\mu F_{\gamma\delta}) = \delta_\theta^\gamma \delta_\phi^\delta F^{\theta\phi} (\partial_\mu F_{\gamma\delta}) = F^{\theta\phi} (\partial_\mu F_{\theta\phi}) = F^{\alpha\beta} (\partial_\mu F_{\alpha\beta}) \right] \\ &\partial_\mu \left(\eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) = -2 F^{\alpha\mu} \partial^\nu F_{\mu\alpha} \iff \\ &\left[\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} &= \frac{1}{2\mu_0} F^{\alpha\mu} \left[\partial_\mu F_\alpha^\nu - \partial_\alpha F_\mu^\nu + \partial^\nu F_{\mu\alpha} \right] \\ \partial_\mu F_\alpha^\nu - \partial_\alpha F_\mu^\nu + \partial^\nu F_{\mu\alpha} &= \eta^{\nu\theta} \partial_\mu F_{\alpha\theta} - \eta^{\nu\theta} \partial_\alpha F_{\mu\theta} + \eta^{\nu\theta} \partial_\theta F_{\mu\alpha} = \eta^{\nu\theta} \left(\partial_\mu F_{\alpha\theta} + \partial_\alpha F_{\theta\mu} + \partial_\theta F_{\mu\alpha} \right) \\ \partial_\mu F_{\alpha\theta} + \partial_\alpha F_{\theta\mu} + \partial_\theta F_{\mu\alpha} &= 0 \end{aligned} \right] \iff \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \right] \iff$$

¹⁸Σημ. Έλλην. Μεταφ. Εδώ παρουσιάζεται η περίπτωση του στατικού ηλεκτρικού φορτίου. Παρατηρούμε το αντίθετο πρόσημο σε σχέση με τη μετρική των Reissner-Nordström της f2a.

¹⁹Αν είχαμε χρησιμοποιήσει το συνηθισμένο πρόσημο για το T_{ik} η λύση μας θα περιείχε το $+\epsilon^2$ αντί για το $-\epsilon^2$. Σε αυτή την περίπτωση δεν θα μπορούσαμε να σχηματίσουμε μια λύση απαλλαγμένη από μοναδικότητες μέσα από ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων.

m δεν καθορίζεται από το ηλεκτρικό φορτίο e , αλλά ότι και το e και η m είναι ανεξάρτητες σταθερές της αλληλεπίδρασης. Αποδεικνύεται επίσης ότι για την απαλοιφή της μοναδικότητας δεν χρειάζεται να λάβουμε τη μάζα με θετικό πρόσημο. Στην πραγματικότητα, όπως θα δείξουμε αμέσως υπάρχει μια λύση απαλλαγμένη από μοναδικότητες για τις οποίες η σταθερά μάζας m εξαφανίζεται. Επειδή εμείς πιστεύουμε ότι αυτές οι μηδενικής μάζας λύσεις είναι οι φυσικά σημαντικές λύσεις στα παρακάτω θα θεωρούμε ότι $m = 0$. Οι εξισώσεις πεδίου χωρίς παρονομαστές μπορούν να γραφούν:

$$\left. \begin{aligned} \phi_{\mu\nu} &= \phi_{\mu,\nu} - \phi_{\nu,\mu} \quad , \quad g^2 \phi_{\mu\nu,\sigma} g^{\nu\sigma} = 0 \\ g^2 (R_{ik} + \phi_{i\alpha} \phi_{\kappa}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{ik} \phi_{\alpha\beta} \phi^{\alpha\beta}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

όπου στην τελευταία εξίσωση ο όρος με το R έχει παραληφθεί καθώς μηδενίζεται ως αποτέλεσμα της 7 από την οποία $T_{\alpha}^{\alpha} = 0$.

Στην εξίσωση 8 (με $m = 0$) κάποιος μπορεί να παραγματοποιήσει τον μετασχηματισμό αντικαθιστώντας την r με την u όπου η u και η r συνδέονται από την

$$u^2 = r^2 - \frac{\epsilon^2}{2}$$

Με αυτό τον μετασχηματισμό κάποιος καταλήγει στην ²⁰.

²⁰Σημ. Έλλην. Μεταφ. Για $m = 0$ η 8 γίνεται:

$$\left[\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{1}{(1 - \frac{\epsilon^2}{2r^2})} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + (1 - \frac{\epsilon^2}{2r^2}) dt^2 \\ u^2 &= r^2 - \frac{\epsilon^2}{2} \iff r = \sqrt{u^2 + \frac{\epsilon^2}{2}} \\ dr &= \frac{u du}{\sqrt{u^2 + \frac{\epsilon^2}{2}}} \end{aligned} \right] \iff$$

$$ds^2 = -\frac{u^2 + \frac{\epsilon^2}{2}}{u^2} \frac{u^2 du^2}{u^2 + \frac{\epsilon^2}{2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{u^2}{u^2 + \frac{\epsilon^2}{2}} dt^2 \iff$$

$$ds^2 = -du^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{u^2}{u^2 + \frac{\epsilon^2}{2}} dt^2$$

Αν είχαμε το αντίθετο πρόσημο θα είχαμε ότι:

$$ds^2 = -du^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{u^2}{u^2 - \frac{\epsilon^2}{2}} dt^2$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0 \quad \phi_4 = \frac{\epsilon}{(u^2 + \frac{\epsilon^2}{2})^{1/2}} \\ ds^2 = -du^2 - (u^2 + \frac{\epsilon^2}{2})(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{2u^2}{(2u^2 + \epsilon^2)} dt^2 \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

Αυτή η λύση είναι απαλλαγμένη από μοναδικότητες για όλα τα πεπερασμένα σημεία στο χώρο ανάμεσα στα δύο φύλλα. Πάλι το φορτίο αντιπροσωπεύεται από μια γέφυρα μεταξύ των φύλλων. Αυτή είναι η αναπαράσταση ενός ηλεκτρικά φορτισμένου σωματιδίου χωρίς μάζα.

4 Συμπέρασμα και Γενικά Σχόλια

Αν κάποιος λύσει τις εξισώσεις της Γενικής θεωρίας της σχετικότητας για ένα στατικό σφαιρικά συμμετρικό χώρο, παρουσία ή απουσία ηλεκτροστατικού πεδίου, διαπιστώνει ότι στις λύσεις εμφανίζονται μοναδικότητες. Αν κάποιος τροποποιήσει τις εξισώσεις με ένα τέτοιο τρόπο ώστε να τις απαλλάξει από την ύπαρξη παρονομαστών, τότε μπορούν να ληφθούν κανονικές λύσεις, υπό την προϋπόθεση ότι κάποιος αντιμετωπίζει τον φυσικό χώρο ως ένα άθροισμα δύο συνδεόμενων φύλλων. Το κάθε ουδέτερο, καθώς και το κάθε φορτισμένο ηλεκτρικά σωματίδιο είναι το μέρος του χώρου το οποίο συνδέει τα δύο φύλλα (γέφυρα). Στις υπερεπιφάνειες επαφής των δύο φύλλων, οι ορίζουσες του g μηδενίζονται.

Θα μπορούσε κάποιος να αναμένει ότι στις διαδικασίες στις οποίες λαμβάνουν μέρος αρκετά στοιχειώδη σωματίδια αντιστοιχούν κανονικές λύσεις των εξισώσεων πεδίου με αρκετές γέφυρες μεταξύ των δύο ισοδύναμων φύλλων τα οποία αντιστοιχούν στο φυσικό χώρο. Μόνο μελετώντας αυτές τις λύσεις θα μπορέσει κάποιος να καθορίσει το βαθμό στον οποίο η θεωρία συμφωνεί με την πραγματικότητα. Προς το παρόν κανείς δεν μπορεί να γνωρίζει αν υπάρχουν κανονικές λύσεις με παραπάνω από μια γέφυρες.

Από τη μελέτη αυτής της θεωρίας εξάγεται ότι το πιο φυσικό ηλεκτρικό σωματίδιο θεωρία είναι ένα σωματίδιο χωρίς μάζα. Από αυτό το συμπέρασμα καταλήγουμε ότι σύμφωνα με αυτή τη θεωρία, θα πρέπει να θεωρήσουμε το ηλεκτρόνιο ή το πρωτόνιο ως ένα πρόβλημα δύο γεφυρών.

Υποστηρίζοντας αυτή τη θεωρία μπορεί κανείς να πει ότι εξηγεί τον ατομικό χαρακτήρα της ύλης όπως επίσης και το γεγονός πως δεν υπάρχουν ηλεκτρικά ουδέτερες αρνητικές μάζες. Η θεωρία δεν εισάγει νέες μεταβλητές άλλες από τις ήδη γνωστές $g_{\mu\nu}$, ϕ_μ , και από αυτό η θεωρία μπορεί να θεωρηθεί πλήρης (ή κλειστή). Από την άλλη κάποιος δεν μπορεί να δει αν η θεωρία περιέχει a priori τα κβαντικά φαινόμενα. Παρόλα αυτά, δεν πρέπει να αποκλειστεί εκ των προτέρων (a priori) η πιθανότητα ότι η θεωρία μπορεί να τις περιέχει. Έτσι τελικά μπορεί να αποδειχθεί ότι μόνο τέτοιες κανονικές λύσεις πολλών γεφυρών μπορούν να υπάρχουν και για τις οποίες τα 'φορτία' των ηλεκτρικών γεφυρών είναι αριθμητικά ίσα μεταξύ τους και μόνο δύο διαφορετικά 'μάζες' εμφανίζονται για τις μαζικές γέφυρες, και

που σήμαινε ότι θα είχαμε μοναδικότητα για $u^2 = \frac{\epsilon^2}{2}$. Επομένως δεν θα μπορούσαμε να αποφύγουμε την ύπαρξη μοναδικότητας με αυτό τον μετασχηματισμό.

για τις οποίες οι στατικές 'κινήσεις' υπόκεινται σε περιορισμούς παρόμοιους με αυτούς που συναντάμε στην κβαντική θεωρία.

Σε κάθε περίπτωση, εδώ εμφανίζεται να υπάρχει μια δυνατότητα για τη διατύπωση στρατηγού μιας γενικής σχετικιστικής θεωρίας της ύλης που θα είναι λογικά απόλυτα ικανοποιητική και η οποία δεν θα περιέχει κανένα καινούργιο υποθετικό στοιχείο.

www.karavolas.gr
ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΒΟΛΑΣ
www.karavolas.gr