

1 Θέμα Πρώτο

1.1 Εκφώνηση

Θεωρείστε την Hamiltonian

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

για σωματίδιο μάζας m σε μονοδιάστατο παραβολικό δυναμικό (ΛΑΤ).

1. Από την Hamiltonian βρείτε τις εξισώσεις κίνησης. Σχεδιάστε κάποιες αντιπροσωπευτικές τροχιές για την κίνηση του συστήματος στο χώρο των φάσεων (q, p) και σχολιάστε τη μορφή τους.
2. Έστω ο μετασχηματισμός $(p, q) \rightarrow (\theta, I)$ μέσω των

$$\begin{cases} q = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \sin \theta \\ p = \sqrt{2mI\omega} \cos \theta \end{cases}$$

Εκφράστε την Hamiltonian στις νέες μεταβλητές. Τι παρατηρείτε ως προς την εξάρτηση από το θ ;

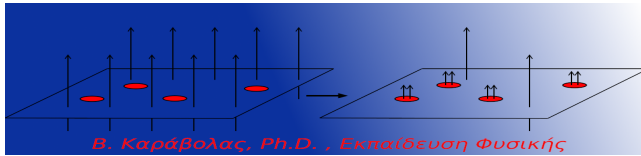
3. Σχεδιάστε τις τροχιές του συστήματος στο νέο χώρο των φάσεων και σχολιάστε τη φυσική τους σημασία αφού πρώτα βρείτε τις εξισώσεις κίνησης ως προς τις νέες μεταβλητές.
4. Να υπολογίσετε την αγκύλη Poisson $\{p, q\}$.

1.2 Λύση

1. Οι εξισώσεις του Hamilton είναι:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q \end{cases}$$

Ο χώρος των φάσεων είναι ο χώρος με συντεταγμένες p, q .



Από την Hamiltonian έχουμε ότι:

$$\left[\begin{array}{l} H = E \\ H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \end{array} \right] \Leftrightarrow E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \Leftrightarrow \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2m\omega^2 E} = 1$$

Που είναι εξίσωση έλλειψης.

Αλλιώς:

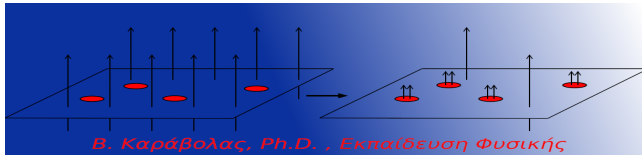
Οι εξισώσεις κίνησης περιέχουν και τις παραγώγους των συντεταγμένων ως προς το χρόνο. Θα πρέπει να απαλείψουμε το χρόνο:

$$\left[\begin{array}{l} \dot{q} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -m\omega^2 q \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} \\ \dot{p} = -m\omega^2 q \end{array} \right] \Leftrightarrow \ddot{q} = -\omega^2 q \Leftrightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \\ p = Am\omega \cos(\omega t) - B\omega m \sin(\omega t) \end{array} \right]$$

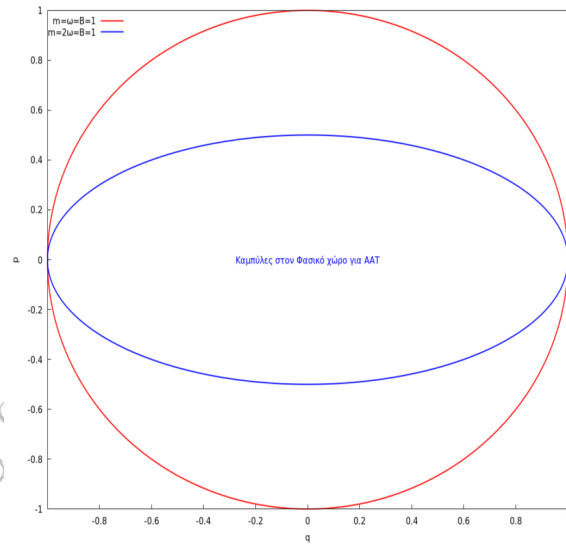
Επιλέγουμε $A = 0$, οπότε:

$$\left[\begin{array}{l} q = B \cos(\omega t) \\ p = -B\omega m \sin(\omega t) \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{q^2}{B^2} = \cos^2(\omega t) \\ \frac{p^2}{B^2\omega^2 m} = \sin^2(\omega t) \end{array} \right] \Leftrightarrow \frac{q^2}{B^2} + \frac{p^2}{B^2\omega^2 m} = 1$$

Που είναι εξίσωση έλλειψης.



Για διαφορετικές τιμές του B έχουμε ότι:
 $(m = \omega = B = 1)$, $(m = 2\omega = B = 1)$. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι καμπύλες, μια έλλειψη (μπλε) και ένας κύκλος (κόκκινη)



2. Από τους μετασχηματισμούς των συντεταγμένων έχουμε ότι:

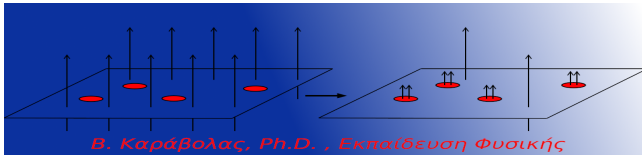
$$\begin{bmatrix} q = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \sin \theta \\ p = \sqrt{2mI\omega} \cos \theta \\ H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \end{bmatrix} \iff H = \frac{2mI\omega}{2m} \cos^2 \theta + \frac{m\omega^2 2I}{m\omega \sin^2 \theta} = I\omega$$

Οι εξισώσεις κίνησης του Hamilton θα είναι τώρα:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} \\ \dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \\ H = I\omega \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{I} = 0 \end{bmatrix}$$

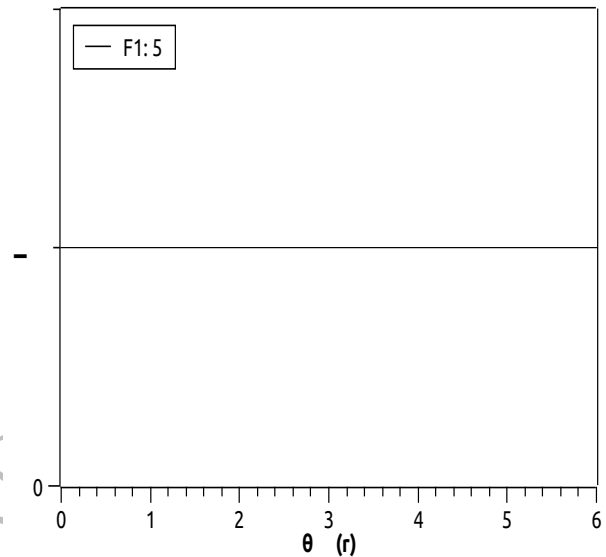
Από αυτές έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \dot{I} = \frac{dI}{dt} = 0 \end{bmatrix} \iff \frac{dI}{dt} = \frac{dI}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = 0 \iff \frac{dI}{d\theta} \omega = 0 \iff \frac{dI}{d\theta} = 0 \iff I = \text{σταθερό}$$



Η γραφική παράσταση θα είναι τώρα:

Το I είναι ανεξάρτητο της γωνίας θ , δηλαδή της παραμέτρου που επιλέξαμε.



3. Η αγκύλη Poisson δίνεται από:

$$\left[\begin{array}{l} \{p, q\} = \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial q}{\partial I} - \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial p}{\partial I} \\ q = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \sin \theta \\ p = \sqrt{2mI\omega} \cos \theta \end{array} \right] \iff \{p, q\} = -\frac{1}{2} \sqrt{2mI\omega} \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sqrt{2mI\omega} \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \sin^2 \theta = -1$$

2 Θέμα Δεύτερο

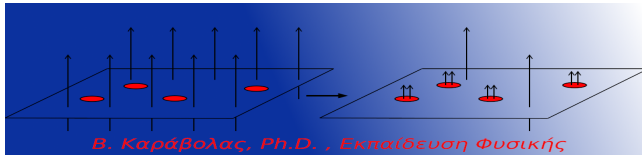
2.1 Εκφώνηση

Έστω χώρος με ελεύθερα φορτία ή ρεύματα με σταθερή μαγνητική διαπερατότητα μ και ηλεκτρική επιτρεπτότητα $\epsilon(\omega)$, όπου ω η κυκλική συχνότητα του ηλεκτρικού πεδίου. Ένα ΗΜ κύμα δίνεται από τις

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0(\omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_0(\omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

1. Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις Maxwell βρείτε τις διανυσματικές σχέσεις που ικανοποιούν τα $\vec{k}$, $\vec{E}(\omega)$, $\vec{B}(\omega)$.
2. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα υπολογίστε την ποσότητα $\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}(\omega))$ και δείξτε ότι $\vec{k} \cdot \vec{k} = \mu \epsilon(\omega) \omega^2$.
3. Χωρίς απώλεια της γενικότητας θεωρείστε ότι $\vec{k} = k \hat{z}$. Η ϵ μπορεί γενικά να είναι μιγαδική $\epsilon(\omega) = \epsilon_1(\omega) + i\epsilon_2(\omega)$ όπως και το κυματόνισμα $k = k_1 + ik_2$. Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στις εκφράσεις του ΗΜ κύματος συζητήστε πως επηρεάζεται το κύμα από τη $\Re(k) = k_1$ και την $\Im(k) = k_2$ αντίστοιχα.



4. Βρείτε τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ παίρνοντας το πραγματικό μέρος των εκφράσεων που υπολογίσατε.

2.2 Λύση

1. Οι εξισώσεις Maxwell σε χώρο με ελεύθερα φορτία και ρεύματα είναι:

$$\left[\begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right]$$

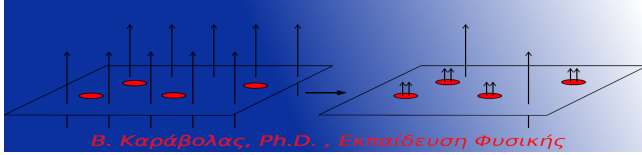
Στη γενική περίπτωση τα διανύσματα θα είναι:

$$\left[\begin{array}{l} \vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z} \\ \vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z} \\ \vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \end{array} \right]$$

Και τότε τα πεδία γίνονται:

$$\left[\begin{array}{l} \vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z} \\ \vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z} \\ \vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \\ \vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \\ \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}(\omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \end{array} \right] \iff$$

$$\left[\begin{array}{l} \vec{E} = E_{x,0} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \hat{x} + E_{y,0} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \hat{y} + E_{z,0} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \hat{z} \\ \vec{B} = B_{x,0} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \hat{x} + B_{y,0} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \hat{y} + B_{z,0} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \hat{z} \end{array} \right]$$



με

$$\begin{bmatrix} E_x = E_{x,0}e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} & B_x = B_{x,0}e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \\ E_y = E_{y,0}e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} & B_y = B_{y,0}e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \\ E_z = E_{z,0}e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} & B_z = B_{z,0}e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \end{bmatrix}$$

Τότε οι εξισώσεις Maxwell γίνονται:

$$\begin{bmatrix} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \iff i(k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z) = \frac{\rho}{\epsilon} \iff \vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{i\epsilon} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \iff i(k_x B_x + k_y B_y + k_z B_z) = 0 \iff \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \iff \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \iff \vec{k} \times \vec{E} = \omega \cdot \vec{B} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \iff \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mu \vec{J} - i\mu\epsilon\omega \vec{E} \iff i(\vec{k} \times \vec{B}) = \mu \vec{J} - i\omega\mu\epsilon \vec{E} \end{bmatrix}$$

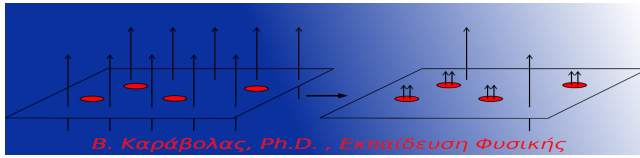
Οι πράξεις είναι:

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \iff$$

$$i[\hat{x}(E_{oz}k_y - E_{oy}k_z) + \hat{y}(E_{ox}k_z - E_{oz}k_x) + \hat{z}(E_{oy}k_x - E_{ox}k_y)]e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} = i\omega \vec{B}$$

Επίσης:

$$\vec{k} \times \vec{E} = \hat{x}(E_{oz}k_y - E_{oy}k_z) + \hat{y}(E_{ox}k_z - E_{oz}k_x) + \hat{z}(E_{oy}k_x - E_{ox}k_y)e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$



Τότε:

$$i(\vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}) = i\omega \vec{B} \iff \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$$

Και

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \iff$$

$$i[\hat{x}(B_{oz}k_y - B_{oy}k_z) + \hat{y}(B_{ox}k_z - B_{oz}k_x) + \hat{z}(B_{oy}k_x - B_{ox}k_y)]e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Επίσης:

$$\vec{k} \times \vec{B} = \hat{x}(B_{oz}k_y - B_{oy}k_z) + \hat{y}(B_{ox}k_z - B_{oz}k_x) + \hat{z}(B_{oy}k_x - B_{ox}k_y)e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

Τότε:

$$i(\vec{k} \times \vec{B}_0 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}) = \mu \vec{J} - i\omega \mu \epsilon \vec{E} \iff \vec{k} \times \vec{B} = -i\mu \vec{J} - \omega \mu \epsilon \vec{E}$$

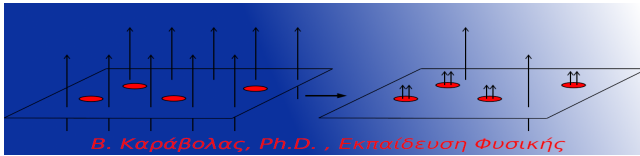
2. Θα χρησιμοποιήσουμε τις προηγούμενες σχέσεις:

$$\left[\begin{array}{l} \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{i\epsilon} \\ \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \\ \vec{k} \times \vec{B} = -i\mu \vec{J} - \omega \mu \epsilon \vec{E} \\ \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \\ c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{\mu \epsilon} \end{array} \right] \iff \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \omega(\vec{k} \times \vec{B}) \iff$$

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = i\mu \omega \vec{J} - \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} \iff \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{k} \cdot \vec{k}) = -i\mu \omega \vec{J} - \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} \iff$$

$$\vec{k} \frac{\rho}{i\epsilon} - \vec{E} \cdot (\vec{k} \cdot \vec{k}) = -i\mu \omega \vec{J} - \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} \iff \begin{cases} -\vec{k} \frac{\rho}{\epsilon} = -\mu \omega \vec{J} \\ k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \end{cases}$$

όπου εξισώσαμε τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη του πρώτου και του δεύτερου μέλους.



3. Έστω $\vec{k} = k\hat{z}$ με $k = k_1 + ik_2$. Τότε:

$$\left[\begin{array}{l} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \vec{k} = k\hat{z} \\ k = k_1 + ik_2 \end{array} \right] \iff \vec{E} = \vec{E}_0 e^{(ik_1 z + i^2 k_2 z - i\omega t)} \iff \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-k_2 z} e^{i(k_1 z - \omega t)}$$

Η κυματική συμπεριφορά $e^{i(k_1 z - \omega t)}$ οφείλεται στο πραγματικό μέρος του κυματαριθμού, ενώ το φανταστικό μέρος δημιουργεί έναν όρο απόσβεσης $e^{-k_2 z}$, δηλαδή όσο διαδίδεται το κύμα τόσο “σβήνει”.

4. Θα έχουμε ότι:

$$\left[\begin{array}{l} \vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0(\omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \\ \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_0(\omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \\ \vec{k} = k\hat{z} \\ k = k_1 + ik_2 \\ e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \end{array} \right] \iff \left[\begin{array}{l} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-k_2 z} e^{i(k_1 z - \omega t)} \\ \vec{B} = \vec{B}_0 e^{-k_2 z} e^{i(k_1 z - \omega t)} \\ e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \end{array} \right] \iff \left[\begin{array}{l} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-k_2 z} \cos(k_1 z - \omega t) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 e^{-k_2 z} \cos(k_1 z - \omega t) \end{array} \right]$$

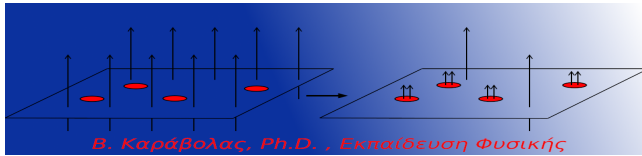
3 Θέμα Τρίτο

3.1 Εκφώνηση

Θεωρείστε σωματίδιο φορτίου q μάζας m σε ΗΜ πεδίο που περιγράφεται από τις συναρτήσεις δυναμικού $\phi(\vec{r}, t)$ και $\vec{A}(\vec{r}, t)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - q(\phi - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})$$

- Υπολογίστε τη συζυγή ορμή $\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}}$ και σχολιάστε τη διαφορά σε σχέση με αυτή ενός ελεύθερου σωματιδίου σε χώρο χωρίς ΗΜ πεδίο.



2. Χρησιμοποιείτε τις εξισώσεις Euler-Lagrange για να βρείτε την εξίσωση κίνησης του σωματιδίου και δείξτε ότι συμπίπτει με το νόμο του Lorentz

$$m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})$$

3. Θεωρείστε τον παρακάτω μετασχηματισμό βαθμίδας

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi - \frac{\partial X}{\partial t} \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot X\end{aligned}$$

όπου X βαθμωτή αυθαίρετη συνάρτηση. Ναδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός αφήνει αναλλοίωτα τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ και ότι η Lagrangian μετασχηματίζεται στην

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + q \frac{dX}{dt}$$

Τι επίδραση έχει ο μετασχηματισμός στην εξίσωση κίνησης;

3.2 Λύση

1. Η Lagrangian ενός ελεύθερου σωματιδίου είναι:

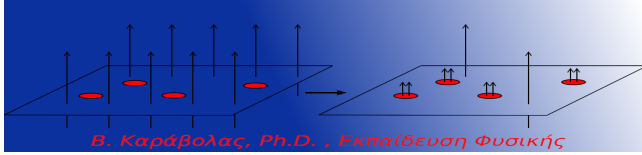
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - q(\phi - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) \quad \text{Παρουσία ΗΜ πεδίου}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 \quad \text{Απουσία ΗΜ πεδίου}$$

Για τις δύο περιπτώσεις η συζυγής ορμή θα είναι:

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{p} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A} & \text{Παρουσία ΗΜ πεδίου} \\ \vec{p} = m\dot{\vec{r}} & \text{Απουσία ΗΜ πεδίου} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι το ΗΜ πεδίο προσθέτει έναν όρο $q\vec{A}$ στην συζυγή ορμή του σωματιδίου.



Β. Καράβολας, Ph.D., Εκπαίδευση Φυσικής

2. Οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = 0 \\ \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - q(\phi - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) \end{array} \right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} = m \dot{\vec{r}} + q \vec{A} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = -q \frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}} + q \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) \end{array} \right] \quad \frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}} = \vec{\nabla} \phi, \quad \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} = m \dot{\vec{r}} + q \vec{A} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = -q \vec{\nabla} \phi + q \vec{\nabla} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) \end{array} \right] \Longleftrightarrow m \ddot{\vec{r}} + q \frac{d\vec{A}}{dt} + q \vec{\nabla} \phi - q \vec{\nabla} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) = 0 \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A}$$

$$m \ddot{\vec{r}} = q \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi - (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) \right)$$

Όμως:

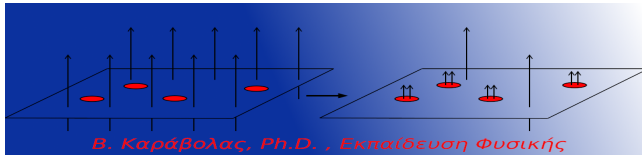
$$\dot{\vec{r}} \times \vec{B} = \dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) - (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$F_L = q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})$$

Επομένως:

$$m \ddot{\vec{r}} = -q \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi - (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) \right) = q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}) = F_L$$



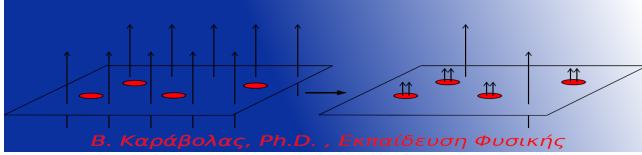
Β. Καράβολας, Ph.D., Εκπαίδευση Φυσικής

3. Έχουμε ότι (X βαθμωτή ανθαίρετη συνάρτηση):

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \phi' &= \phi - \frac{\partial X}{\partial t} \\ \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot X \end{aligned} \right] \iff \left[\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E}' &= -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \\ \vec{B}' &= \vec{\nabla} \times \vec{A}' \\ \phi' &= \phi - \frac{\partial X}{\partial t} \\ \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot X \end{aligned} \right] \iff \\
 & \left[\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E}' &= -\vec{\nabla}(\phi - \frac{\partial X}{\partial t}) - \frac{\partial(\vec{A} + \vec{\nabla} \cdot X)}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} X) \stackrel{\vec{\nabla} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} X)}{=} -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \\ \vec{B}' &= \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \cdot X) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} X) \stackrel{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} X) = 0}{=} \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

Η Lagrangian θα γίνει τότε:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - q(\phi' - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}') \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - q(\phi - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) \\ \phi' &= \phi - \frac{\partial X}{\partial t} \\ \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot X \\ \frac{dX}{dt} &= \frac{\partial X}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{\nabla} X) \end{aligned} \right] \iff \mathcal{L}' = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - q(\phi - \frac{\partial X}{\partial t} - \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla} \cdot X)) \iff \\
 & \mathcal{L}' = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - q(\phi - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) - q(-\frac{\partial X}{\partial t} - \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{\nabla} \cdot X)) = \mathcal{L} + q \frac{dX}{dt}
 \end{aligned}$$



Β. Καράβολας, Ph.D., Εκπαίδευση Φυσικής

Οι εξισώσεις κίνησης θα είναι τότε:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \vec{r}} = 0 \\ \mathcal{L}' = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - q(\phi - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) - q \left(-\frac{\partial X}{\partial t} - \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{X}) \right) \end{array} \right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \vec{r}} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\vec{r}}} = m \dot{\vec{r}} + q \vec{A} + q \vec{\nabla} X \\ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \vec{r}} = -q \frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}} + q \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) + q \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\frac{dX}{dt} \right) \end{array} \right] \Longleftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \vec{r}} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\vec{r}}} = m \dot{\vec{r}} + q \vec{A} + q \vec{\nabla} X \\ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \vec{r}} = -q \frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}} + q \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) + q \vec{\nabla} \frac{dX}{dt} \end{array} \right] \Longleftrightarrow m \ddot{\vec{r}} + q \frac{d\vec{A}}{dt} + q \vec{\nabla} \phi - q \vec{\nabla} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) = 0$$

Παρατηρούμε η βαθμωτή συνάρτηση X δεν εμφανίζεται. Οι εξισώσεις κίνησης παραμένουν αναλλοίωτες κατά τον μετασχηματισμό αυτό.